

מונג'

1. נתונים שני מעגלים Ω_1, Ω_2 . מעגל ω משיק ל- Ω_1, Ω_2 בנקודות P_1, P_2 . הוכיחו כי הישר P_1P_2 עובר בנקודה קבועה שלא תלויה בבחירה של ω .

2. יהי משולש ABC ונקודה D על הצלע BC . המעגלים החסומים במשולשים ABD, ACD יסומנו ω_1, ω_2 בהתאמה והמעגלים החסומים מבחוץ באותם המשולשים מול הצלע BC יסומנו Ω_1, Ω_2 בהתאמה. הוכיחו כי המשיק החיצוני המשותף של ω_1, ω_2 והמשיק החיצוני המשותף של Ω_1, Ω_2 נפגשים על BC .

3. נתון מרובע קמור $ABCD$. המשכי הצלעות AB, CD נפגשים ב- E והמשכי הצלעות AD, BC נפגשים ב- F . דרך E ודרך F הועברו שני ישרים כך שארבעת הישרים מחלקים את המרובע $ABCD$ לתשעה מרובעים קטנים. הוכיחו כי אם המרובעים הקטנים שצמודים לקודקודים B, C, D חסומים מעגלים אז גם המרובע הקטן שצמוד לקודקוד A חוסם מעגל.

4. משולש ABC חסום במעגל Ω . יהי ω_A מעגל המשיק לצלעות AB, AC ול- Ω בנקודה X . באופן דומה נדגיר את ω_B, ω_C ואת נקודות ההשקה שלהם עם Ω ב- Y, Z בהתאמה. הוכיחו כי AX, BY, CZ נפגשים בנקודה.

5. יהי משולש ABC ומעגל Ω שנמצא בתוך המשולש ולא נוגע בצלעות המשולש. המעגל ω_A משיק לצלעות AB, AC ובאופן חיצוני משיק למעגל Ω בנקודה A' כך שהקטע AA' חותך את Ω רק בנקודה A' . באופן דומה נגדיר את המעגלים ω_B, ω_C שמשיקים ל- Ω בנקודות B', C' . הוכיחו כי AA', BB', CC' נפגשים בנקודה.

6. מרובע $ABCD$ חוסם מעגל. הוכיחו כי מרכז המעגל החסום במשולש ABC , מרכז המעגל החסום מבחוץ במשולש ADC מחוץ ל- D ומפגש האלכסונים במרובע נמצאים על ישר אחד.

7. AD הוא חוצה הזווית במשולש ABC . הוכיחו כי המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים ABD, ACD נחתכים על BC .

8. יהי משולש ABC ומעגלים $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ המשיקים לצלעות המשולש באופן הבא: ω_A משיק לצלעות AB, AC , ω_B לצלעות BA, BC , ω_C לצלעות CA, CB . בנוסף $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ משיקים זה לזה באופן חיצוני בנקודות X, Y, Z . הוכיחו כי AX, BY, CZ נפגשים בנקודה.

9. נתון משולש ABC ומעגלים $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ כך ש- ω_A משיק לצלעות AB, AC ו- ω_B, ω_C מקיימים תנאים דומים. נסמן ב- P_A את מפגש המשיקים הפנימיים של ω_B ו- ω_C . באופן דומה נגדיר את P_B, P_C . הוכיחו כי AP_A, BP_B, CP_C נפגשים בנקודה.

10. מרכז המעגל החסום במשולש ABC יסומן I . תהי D נקודה על הצלע BC . נסמן ב- ω_B, ω_C את המעגלים החסומים במשולשים ABD, ACD בהתאמה. ω_B, ω_C משיקים לצלע BC בנקודות E, F בהתאמה. ישר המרכזים של ω_B, ω_C נחתך עם AD בנקודה P . הישרים CP, BI נפגשים בנקודה X והישרים BP, CI נפגשים בנקודה Y . הראו כי EX, FY נחתים על המעגל החסום ב- ABC .

11. מעגל ω חסום במשולש ABC . נסמן ב- ω' את השיקוף של ω ביחס לקודקוד A . תהי A' נקודה כך שהקטעים $A'B$ ו- $A'C$ משיקים ל- ω' . נסמן ב- D את נקודת ההשקה של ω עם BC וב- M את אמצע BC . הוכיחו כי AM חוצה את $A'D$.

12. על הצלע AB של מרובע קמור $ABCD$ נברחה נקודה P . יהי ω המעגל החסום במשולש CPD ו- I המרכז של ω . נתון ש- ω משיק למעגלים החסומים במשולשים APD, BPC בנקודות K, L בהתאמה. הישרים AC ו- BD נפגשים בנקודה E והישרים AK ו- BL נפגשים בנקודה F . הוכיחו כי E, F, I נמצאות על ישר אחד.