אינוורסשיקוף ממיקל

יהי מרובע $ABCD$, הצלעות AB, CD נחתכות ב-E והצלעות AD, BC נחתכות ב-F.
תהי M נקודת מיקל של המרובע.

הוכיחו כי קיים אינוורסשיקוף מ-M שמחליף בין A, C, בין B, D ובין E, F.

יהיו P, Q נקודות צמודות איזוגונלית ביחס למרובע. הוכיחו כי P, Q מתחלפות באינוורסשיקוף ממיקל.

משפט קליפורד: יהי מרובע $ABCD$ ותהי X נקודה במישור. המעגלים ABX, CDX נחתכים ב-Y. המעגלים BCY, ADY נחתכים ב-Z. המעגלים ABZ, CDZ נחתכים W. אזי המעגלים BCW, ADW נחתכים ב-X.

הוכיחו את המשפט והוכיחו ש-X, Z אינוורשיקופיות ממיקל.

שתי דוגמאות לחימום

1. יהי מרובע שלם $ABCD$. הוכיחו כי ארבעת המרכזים של המעגלים החוסמים את משולשי המרובע נמצאים על מעגל אחד.

2. א. הוכיחו כי המעגל BCH והמעגל עם קוטר AH נפגשים על תיכון של ABC.
ב. הוכיחו כי השיקוף של הנקודה מסעיף א' נמצא על תיכושקף של ABC.

שאלות

1. על הצלעות AB, AC של משולש ABC נבחרו נקודות D, E כך ש-$AD = AE$.
מרכז המעגל החסום ב-ABC יסומן ב-I. המעגלים BDI, CEI נחתכים שנית ב-P.
הוכיחו כי המעגלים BCP, DEP משיקים זה לזה.

2. בתוך מרובע קמור $ABCD$ נתונה נקודה P כך ש-$\angle ADP = \angle BCP$,
$\angle DAP = \angle CBP$. האנכים האמצעים של AB, CD נחתכים בנקודה Q. הוכיחו כי $\angle AQB = 2\angle ADP$.

3. בתוך מרובע קמור $ABCD$ נתונה נקודה P כך ש-$\angle ADP = \angle BCP$,
$\angle DAP = \angle CBP$. המשכי הצלעות AB ו-CD נחתכים ב-E. המעגלים ADE, BCE נחתכים ב-M. הראו כי MP והאנך מ-E ל-AD נחתכים על המעגל BCE.

4. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. מרכז המעגל החסום יסומן I. הישר EF נחתך עם המעגל החוסם של ABC בנקודות P, Q. הראו כי $\angle DPA + \angle DQA = \angle QIP$.

5. יהי מרובע $ABCD$ החסום במעגל שמרכזו O. חוצי הזוויות הפנימיים של $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ יוצרים מרובע קמור Q_1. ארבעת חוצי הזוויות החיצוניים של אותן הזוויות יוצרים מרובע קמור Q_2.
הוכיחו כי המרובעים Q_1, Q_2 חסומים במעגלים, וש-O נמצאת על הישר דרך מרכזי המעגלים החוסמים של Q_1, Q_2.

6. יהא $ABCD$ מרובע החסום במעגל עם מרכז O. נסמן ב-X את נקודת החיתוך של חוצי הזוויות הפנימיים של A ושל B, ב-Y את נקודת החיתוך של חוצי הזוויות הפנימיים של B ושל C, ב-Z את נקודת החיתוך של חוצי הזוויות הפנימיים של C ושל D וב-W את נקודת החיתוך של חוצי הזוויות הפנימיים של D ושל A. בנוסף נסמן ב-P את נקודת החיתוך של AC ו-BD. הוכיחו כי הנקודות X, Y, Z, W, O נמצאות על מעגל אחד אם ורק אם הנקודות X, Y, Z, W, P נמצאות על מעגל אחד.

7. יהי משולש ABC החסום במעגל Ω וחוסם מעגל ω. תהי D נקודה על Ω ותהי T נקודת ההשקה של המעגל החצי חסום מול A עם Ω. המשיקים מ-D ל-ω נחתכים ב-BC בנקודות P, Q. הוכיחו $DPQT$ חסום במעגל.

8. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות AB, AC בנקודות F, E. תהי P נקודה על המעגל החסום כך ש-$\angle BPF = \angle EPC$. הישר EF נחתך עם BP, CP בנקודות X, Y. הוכיחו כי $EF = 2XY$.

9. משולש ABC חסום במעגל Ω וחוסם מעגל שמרכזו I. תהי K ההיטל של I על קטע האמצעים של ABC שמקביל ל-BC. תהי S אמצע הקשת $\widehat{BC}$. תהי T נקודה על Ω כך ש-$\angle STI = 90°$. נתון מעגל שמשיק לצלע BC ומשיק מבפנים ל-Ω בנקודה A, מרכז המעגל הזה יסומן M. הוכיחו כי TI חוצה את $\angle KTM$.

10. על חוצה הזווית של $\angle BAC$ נבחרה נקודה D שנמצאת בתוך המשולש. יהיו E, F על AC, AB בהתאמה כך ש-$\angle ADE = \angle BCD$ ו-$\angle FDA = \angle DBC$. תהי X על AC כך ש-$CX = BX$. הוכיחו כי BC, EFוישר המרכזים של המעגלים ADC, EDX נפגשים בנקודה אחת.