

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. n קוסמים יושבים סביב שולחן עגול. כל אחד מהם חובש כובע שחור או לבן, ורואה את צבעי הכובעים של כל הקוסמים פרט לכובע של עצמו. בכל דקה, המלך ארתור מצלצל בפעמון, וכל אחד מהקוסמים בוחר קוסם אחר באופן סודי ומטיל עליו כישוף (אסור לקוסם לכשף את עצמו, ואסור לו שלא לכשף אף אחד). כל קוסם יודע כמה קוסמים אחרים כישפו אותו, אך לא יודע מי הם.

לאחר k צלצולי פעמון, כל הקוסמים מנחשים בו-זמנית מהו הצבע של הכובע אותו הם חובשים. לקוסמים מותר לגבש אסטרטגיה לפני הכניסה לחדר, אך לאחר מכן אסור להם לתקשר. מהו ה- k המינימלי עבורו הקוסמים מסוגלים להבטיח שכולם יהיו צודקים?

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל x, y ממשיים מתקיים:

$$f(x) \cdot f(y + f(y)) = x \cdot f(f(x)) + f(y)$$

3. שחר רושם 900 ספרות בסדר כלשהו, כאשר כל ספרה מ-1 עד 9 מופיעה 100 פעמים בדיוק, וכך מתקבל מספר 900-ספרתי a . דניאל מכפיל את המספר ב-11, וכך מתקבל מספר a_0 . מרגע זה שחר עושה את הפעולה הבאה בכל שלב ושלב:

בהינתן מספר a_{n-1} , צובעים את ספרותיו באופן מתחלף בשני צבעים, שחור ולבן. מחשבים את סכום הספרות השחורות S ואת סכום הספרות הלבנות L ומגדירים מספר

$$a_n = |S^2 - L^2|$$

מצאו את a_9 .

4. יהי ABCD מלבן. הנקודה P נמצאת במרחק שווה מהצלעות AB ו-CD נבחרה נקודה Q על הצלע AB. המעגלים החוסמים של משולשים AQP ו-BQP חותכים את הצלעות AD ו-BC בנקודות E ו-F בהתאמה. ישר דרך P המאונך לקטע EF פוגש את הצלע CD בנקודה R. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של משולש PAB. תהי S נקודה במישור כך ש-O הוא אמצע הקטע QS. הראו כי המרובע ERFQ חסום במעגל.

בהצלחה!

קבוצת רותם

1. יהי ABCD מלבן. הנקודה P נמצאת במרחק שווה מהצלעות AB ו-CD. נבחרה נקודה Q על הצלע AB. המעגלים החוסמים של משולשים AQP ו-BQP חותכים את הצלעות AD ו-BC בנקודות E ו-F בהתאמה. ישר דרך P המאונך לקטע EF פוגש את הצלע CD בנקודה R. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של משולש PAB. תהי S נקודה במישור כך ש-O הוא אמצע הקטע QS. הראו כי המרובע ERFQ חסום במעגל.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל x, y ממשיים מתקיים:

$$f(x) \cdot f(y) + f(x) \cdot f(f(x) - y) = x^2.$$

3. שחר רושם במחברת את כל החזקות של 2 החל מ- 2^1 ועד 2^{3000} , וגם את כל החזקות של 5 החל מ- 5^1 ועד 5^{3000} . הראו שארבע הספרות השמאליות של אחד המספרים שהוא רושם הן "1000".

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

1. ממקמים מספרים 1,2,3,4,5,6,7,8 בקודקודי קוביה (כל המספרים צריכים להופיע). לאחר מכן, לכל מקצוע של הקוביה מחשבים את הערך המוחלט של הפרש המספרים בקצותיו. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי והקטן ביותר האפשרי עבור סכום המספרים שהתקבלו בכל המקצועות?

2. על ההיקף של מרובע ABCD סומנו קודקודים ונקודות נוספות, כך שכל צלע מחולקת על ידי הנקודות המסומנות ל-30 חלקים שווים. לאחר מכן, הנקודות המסומנות נצבעו באופן מתחלף (כשעוברים על ההיקף יש לבן אחרי שחור ושחור אחרי לבן), כאשר הקודקוד A שחור. סכום ריבועי המרחקים מנקודה X במישור לכל הנקודות השחורות היא s , וסכום ריבועי המרחקים מהנקודה X לכל הנקודות הלבנות היא ℓ . מה יותר גדול: s או ℓ ?

3. מצאו את כל השלשות m, n, k של מספרים שלמים חיוביים כך ש-

$$m^3 - 3mn + n^3 = 11^k - 1.$$

4. במשולש מסוים הגבהים נפגשים בנקודה H, חוצי הזוויות בנקודה I, והאנכים האמצעים בנקודה O. הראו כי $2 \cdot OH > 3 \cdot IH$.

5. במישור נמצאות 100 צפרדעים אשר ממוספרות 1, 2, ..., 100. אריה מוחא כף ואז הצפרדעים קופצות ביחד. צפרדע מספר 1 קופצת מעל צפרדע מספר 2, ..., וצפרדע מספר 100 קופצת מעל צפרדע מספר 1. כאשר צפרדע קופצת מעל צפרדע אחרת היא נוחתת על נקודה כלשהי על הישר שמחבר ביניהן, מהצד השני של הצפרדע שמעליה היא קפצה. האם ייתכן שבמהלך התהליך ההיקף של הקמור של מיקומי הצפרדעים קטן?

6. מספר טבעי נקרא פלינדרום בבסיס מסוים, אם כאשר הופכים את ספרותיו ברישום בבסיס זה מקבלים את המספר המקורי.

נתון מספר טבעי המהווה פלינדרום בבסיסים 2,3,9. האם ייתכן שיותר ממחצית ספרותיו ברישום בבסיס 3 הן 2?

7. בקרנבל משתתפים 5778×5778 רקדנים ורקדניות. ברגע מסוים הם הסתדרו בשריג ריבועי מושלם בצורת ריבוע (5778 שורות ו- 5778 עמודות). כל רקדנית מסתכלת במקביל לאחת הצלעות של הריבוע, ובקרבן שלאורכה היא מסתכלת יש יותר רקדנים מאשר רקדניות. מהי הכמות המרבית של רקדניות?

8. נתון מספר מרוכב A , מספר טבעי d , ומספר חיובי q המקיימים $|A|^2 = \frac{1}{q^d}$. הראו

ששורשי הפולינום $A(x^d - x^{d-1}) - \frac{x}{q} + 1 = 0$ נמצאים על מעגל אחד במישור המרוכב.

בהצלחה!

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

$$1. \text{ נתונה סדרה } a_n \text{ המוגדרת באופן הבא: } a_1 = 1, a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-1} + \frac{9}{4}} - \frac{1}{2}$$

חשבו את a_{5778} .

2. במישור סומנו קודקודים של מצולע משוכלל $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_{12}$. אנחנו מניחים גם ש-
 $A_{i+12} = A_i$ לשם נוחות. האם ניתן לצייר 12 עקומות שלא נחתכות, כך שכל קודקוד A_i
 יהיה מחובר לקודקוד A_{i+5} ?

3. תוכנת מחשב מבצעת את הפעולה הבאה: בהתחלה על המסך רשום מספר טבעי התחלתי $N > 1$ אותו המשתמש בוחר. לאחר דקה, היא מחליפה אותו במספר המורכב משש הספרות הראשונות בפיתוח העשרוני של $\frac{1}{n}$. למשל, את 3 התוכנה הופכת ל-333333, ואת 2 התוכנה הופכת ל-500000. לאחר דקה נוספת, המספר על המסך מוחלף במספר חדש לפי אותה חוקיות, וכן הלאה. אם בשלב מסוים רשום על המסך מספר שקטן מ-2, התוכנה נתקעת.

מספר התחלתי N נקרא נצחי אם כשמתחילים איתו, הוא מופיע שוב על המסך לאחר מספר דקות כלשהו (והתוכנה לא נתקעת בזמן זה). מצאו את כמות המספרים הנצחיים.

4. במצולע משוכלל ABCDEFG האלכסון CF פוגש את האלכסונים AD ו-BD בנקודות K ו-N בהתאמה. האלכסונים BD ו-CG נפגשים בנקודה I. הישר דרך I שמקביל ל-AD חותך את הצלע AB בנקודה M. מה יותר גדול: שטח המחומש AMINK או שטח המשולש DFK?

בהצלחה!

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. לאילו ערכי n קיימים n מספרים טבעיים שונים a_1, a_2, \dots, a_n עבורם השברים $\frac{k}{a_k}$

$$? \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} = 1$$

6. בממלכת המילטון יש $2n$ אבירים. כל זוג אבירים הם או חברים או אויבים. ביום ראשון התקיים טורניר שבו האבירים חולקו ל- n זוגות אויבים, וניהלו דו-קרב בזוגות. ביום שני האבירים ערכו משתה, ולשם כך התחלקו ל- n זוגות חברים. ביום שלישי, המלך רוצה להושיב את האבירים סביב השולחן העגול, כך שלצידו של כל אביר יושבים חבר שלו וגם אויב שלו. האם המלך בהכרח יכול לעשות זאת:

(א) כאשר $n=3$ (ב) כאשר $n=4$?

7. בפירמידה משולשת משוכללת, אורך כל גובה שווה ל-3. במרחב סומנה כל נקודה שנמצאת בתוך הפירמידה או על שפת הפירמידה, אשר המרחקים ממנה לכל אחת מהפאות הם מספרים שלמים. מצאו את כמות הריבועים במרחב שכל הקודקודים שלהם הם נקודות מסומנות.

בהצלחה!

קבוצת רותם

1. יהי n שלם חיובי. קוד הוא רצף באורך $3n$ של האותיות a, b ו- c בו כל אחת מהאותיות מופיעה n פעמים בדיוק. נגדיר מרחק בין שני קודים בתור כמות ההחלפות המינימלית של אותיות סמוכות שצריך לבצע על מנת להפוך קוד אחד לקוד האחר. שני קודים נקראים מרוחקים אם המרחק בינם הוא לפחות $\frac{3}{2} \cdot n^2$. הראו כי לכל קוד קיים קוד מרוחק ממנו.

2. מצאו את כל הזוגות (p, q) של מספרים ראשוניים כך ש- $p > q$ והמספר

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1}$$

הוא שלם.

3. נתון מרובע קמור ABCD בו חסום מעגל שמרכזו I. מרכזי המעגלים החסומים במשולשים DAB, ABC, BCD, CDA יסומנו I_a, I_b, I_c, I_d בהתאמה. המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים החסומים של AI_bI_d ו- CI_bI_d נפגשים בנקודה X. בדומה, המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים החסומים של BI_aI_c ו- DI_aI_c נפגשים בנקודה Y. הראו כי $\angle XIY = 90^\circ$.

בהצלחה!