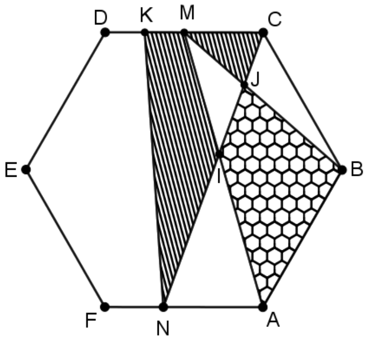
28/10/2018 **מחנה סתיו** י"ט בחשון תשע"ט

קבוצת דן+שניר

אין להשתמש במחשבון

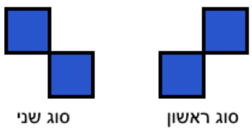
1. למינקובסקי יש ערימת פטריות, שמשקלה הכולל הוא 199 קילוגרם. משקלה של כל פטרייה הוא לכל היותר קילוגרם אחד. יום אחד, מינקובסקי הזמין למשתה 100 לוטרות. הוכיחו שהוא יכול לחלק ביניהן את הפטריות (בלי לחתוך אותן), כך שכל לוטרה מקבלת לפחות קילוגרם פטריות.



2. נתון משושה משוכלל ABCDEF. נקודה M היא אמצע הצלע CD, נקודה K היא אמצע הקטע DM, ונקודה N נמצאת על הצלע FA. הקטעים MA ו-MB חותכים את CN בנקודות I ו-J בהתאמה.

מה יותר גדול: $S_{\text{MINK}}+S_{\text{JCM}}$ או S_{BAIJ} ?

3. פתרו את המשוואה: $36=x+\sqrt{3+\sqrt{x+\sqrt{3+\sqrt{x+\sqrt{3+\sqrt{x+3}}}}}}$.



4. זוג משבצות על דף משבצות יקרא זוג מסוג ראשון אם הן חולקות פינה כמתואר באיור הימני (ימין-למעלה צמוד לשמאל-למטה), ויקרא זוג מסוג שני אם הן חולקות פינה כמתואר באיור השמאלי (ימין-למטה צמוד לשמאל-למעלה).

צבי צבע מספר משבצות של דף משבצות בכחול. הוא הצליח לחלק את כל המשבצות הכחולות לזוגות מהסוג הראשון. לאחר מכן, הוא הצליח לחלק את כל המשבצות הכחולות לזוגות מהסוג השני. הוכיחו שכמות המשבצות הכחולות מתחלקת בארבע.

5. נסמן ב-$S(x)$ סכום הספרות של המספר x. נתונים ארבעה מספרים 4-ספרתיים a,b,c,d שמקיימים $a+b+c+d=5779$. מצאו את

א. הערך הקטן ביותר האפשרי של $S(a)\cdot S(b)\cdot S(c)\cdot S(d)$.

ב. הערך הגדול ביותר האפשרי של $S(a)\cdot S(b)\cdot S(c)\cdot S(d)$.

בהצלחה!

29/10/2018 **מחנה סתיו** כ' בחשוון תשע"ט

תחרות קבוצתית (שניר+דן+ירדן)

1. במישור הועברו שישה ישרים כחולים שונים, ועליהם סומנו מספר נקודות אדומות. נתון שכל ישר כחול עובר בשלוש נקודות אדומות בדיוק. כמה נקודות אדומות יש? מצאו את כל האפשרויות.

2. נתונים $x,y>0$. הוכיחו כי $(3+x+y)\cdot(6+x+4y)\geq 36\sqrt{2xy}$.

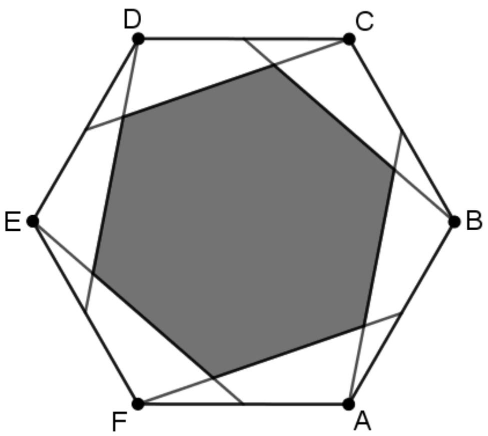
3. במישור משבצות אינסופי, צבי צבע כל משבצת באחד מ- K צבעים. ידוע שכל פרש העומד על אחת המשבצות מאיים על אותה כמות משבצות מכל צבע. האם יתכן כי:

א. $K=2$? ב. $K=4$? ג. $K=8$?

4. נתון עיגול α שרדיוסו 5, ועיגול β שרדיוסו 7. המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 4. מהו אורך הקטע הארוך ביותר, שנמצא כולו בתוך α ואינו עובר בתוך β?

5. האם לכל שלם $n\geq 5779$ ניתן לרצף מלבן בגודל $6347\times n$ באמצעות ריבועים שאורך הצלע של כל אחד מהם הוא שלם שגדול מ-1?

6. במשושה משוכלל ABCDEF, אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DE, EF, FA יסומנו 'A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F בהתאמה. ששת הישרים 'AB', BC', CD', DE, EF', FA יוצרים משושה משוכלל בתוך המשושה המקורי. מהו היחס בין שטח המשושה החדש לשטח המשושה המקורי?



7. נתונים מספרים ממשיים $x_1,x_2,...,x_{2019}$. הוכיחו שקיים מספר ממשי a כך שמתקיים

$$\{x_1+a\}+\{x_2+a\}+\cdots+\{x_{2019}+a\}\leq 1009$$

כאשר $\{x\}$ הוא הערך השברי של x (למשל $\{3.42\}=0.42$).

8. שתי סדרות מתחילות ב- $x_1=4.25,\quad y_1=5$ ומקיימות נוסחאות נסיגה:

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n^2-2y_n \\ y_{n+1}=y_n^2-2x_n \end{cases}$$

חשבו את היחס $\frac{y_{100}}{x_{101}}$ עם 20 ספרות דיוק אחרי הנקודה העשרונית.

בהצלחה!

29/10/2018 **מחנה סתיו** כ' בחשוון תשע"ט

קבוצת רותם

1. האם המספר $9\underbrace{000000000000000}_{15}7\underbrace{999999999999999}_{15}$ ראשוני?

2. נתון משולש ABC, בו המעגל החוסם יסומן ω, ומרכז המעגל החסום יסומן I. האנך ל-AI דרך I חותך את BC בנקודה D. הנקודה N היא אמצע הקשת BAC במעגל ω.
הישר ND חותך שנית את ω בנקודה E, והישר AD חותך שנית את ω בנקודה F.
הוכיחו כי הישרים AI, ND והמעגל החוסם של EFI נחתכים בנקודה אחת.

3. נתון לוח משבצות $n\times n$, ובו במשבצת השמאלית התחתונה עומד אסימון. איילה וברווז משחקים משחק: כל אחד מהם בתורו מזיז את האסימון לאחת המשבצות הסמוכות בצלע שבה האסימון לא ביקר קודם. אם אחד השחקנים מבצע מהלך שאחריו האסימון לא יכול להגיע לאף אחת מהפינות תחת מהלכים חוקיים, הוא מפסיד מיידית. המטרה של איילה היא שהאסימון יגיע לפינה השמאלית-עליונה או לפינה הימנית-תחתונה, והמטרה של ברווז היא שהאסימון יגיע לפינה הימנית-עליונה. אם איילה מתחילה, למי מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?

בהצלחה!

30/10/2018 **מחנה סתיו** כ"א בחשוון תשע"ט

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. על הלוח כתוב המספר 5779. בכל מהלך ניתן להחליף את המספר הכתוב n ב-ab אם מתקיים $n = a + b$ עבור שני שלמים חיוביים a, b.
לאילו מספרים ניתן להגיע בדרך זו?

2. איילה רוצה לצייר במישור 2018 קרניים, כך שכל אחת תיחתך עם שלוש אחרות בדיוק. האם היא יכולה לעשות זאת?

3. 49 מספרים שלמים מסודרים במעגל. לכל שני מספרים סמוכים x, y מתקיים $x + y = (x - y)^2$. מהו הערך המקסימלי האפשרי של סכום המספרים במעגל?

4. נתון משולש ABC ומרכז המעגל החוסם שלו O. מעגל דרך C ו-O שמשיק לצלע BC חותך את הישר AC בנקודה D שאינה C. המעגל AOD חותך את הישר AB בנקודה E שאינה A. המעגל EBC חותך את הישר AC בנקודה F שאינה C. הוכיחו כי AD = CF.

בהצלחה!

30/10/2018 **מחנה סתיו** כ"א בחשון תשע"ט

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. איילה וברווז משחקים משחק בו יש מספר ערימות אבנים. בכל תור שחקן יכול **או** להחסיר אבן מאחת הערמות (אם בערמה הייתה אבן אחת היא נעלמת), **או** להחליף שתי ערמות עם x ו- y אבנים בערמה אחת של xy אבנים. איילה מתחילה, ומי שלא יכול לשחק בתורו מפסיד. מי מנצח כתלות בכמות הערמות התחילית והגדלים שלהן?

2. נתונים a, b, c ממשיים כך ש- $abc = 1$. הוכיחו כי:

$$3+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}} \le 2a+2b+2c\,.$$

3. יהא ABC משולש ויהיו H, O, I מפגש הגבהים ומרכז מעגל חוסם וחסום. נסמן ב-P את מרכז המעגל שמשיק מבפנים לשלושת המעגלים החסומים מבחוץ של המשולש ABC (כלומר, שלושת המעגלים החסומים מבחוץ נמצאים בתוך המעגל שמרכזו P). יהי Q השיקוף של H ביחס ל-P. הוכיחו ש-O, I, Q נמצאים על ישר.

בהצלחה!

1/11/2018 **מחנה סתיו** כ"ג בחשוון תשע"ט

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

1. נתונים מספרים ממשיים a,b,c,d עבורם מתקיים:

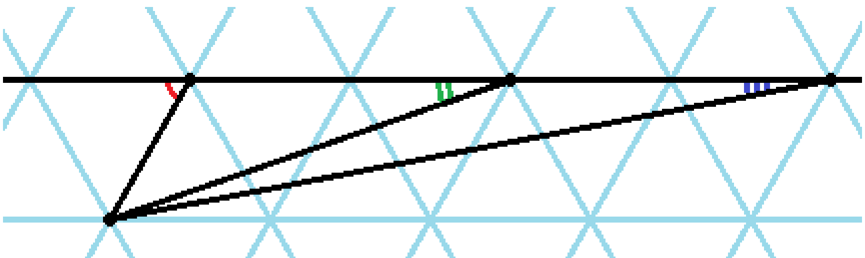
$$\begin{cases} a+b+c>d \\ 4a+2b+c<\frac{d}{2} \\ 9a+3b+c>\frac{d}{3} \\ 16a+4b+c<\frac{d}{4} \end{cases}$$

מה יותר גדול: $25a+5b+c$ או $\frac{d}{5}$?

2. מצאו את כל השלשות a,b,c של שלמים חיוביים כך ש-$ab+1,\quad bc+1,\quad ca+1$ כולם חזקות של 2.

3. בתחרות מתמטית שאורכה שלושה ימים השתתפו מספר ילדים. בכל אחד משלושת הימים של התחרות, כל ילד פתר בין 0 ל-3 שאלות. ידוע שלכל זוג ילדים, יש יום בו הם פתרו אותה כמות שאלות, ויש יום בו הם פתרו כמות שונה של שאלות. מהי הכמות הגדולה ביותר של ילדים שיכולה להיות בתחרות?

4. על סריג שמורכב ממשולשים משוכללים סימנו שלוש זוויות. מצאו את סכומן.



בהצלחה!

1/11/2018 **מחנה סתיו** כ"ג בחשוון תשע"ט

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. סדרה מוגדרת על ידי תנאי התחלה $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=9$ וכלל נסיגה $x_n=x_{n-1}^3x_{n-2}+x_{n-2}^3+x_{n-3}$ עבור $n\geq 4$. הוכיחו שלכל שלם חיובי k קיים שלם חיובי n כך ש- $k\,|\,x_n$.

6. במדבר המישורי יש נווה מדבר נקודתי שממנו יוצאים 7 שבילים ישרים (קרניים שמקורן בנווה המדבר). גמל נמצא במדבר, ומתחיל ללכת בקו ישר שאינו עובר דרך נווה המדבר. בכל פעם שגמל מגיע לשביל, הוא משנה את כיוון הליכתו לכיוון המשוקף ביחס לאנך לשביל. ידוע כי גמל יבצע אינסוף פניות בהליכתו. האם גמל בהכרח יחזור על עקבותיו החל מרגע מסוים?

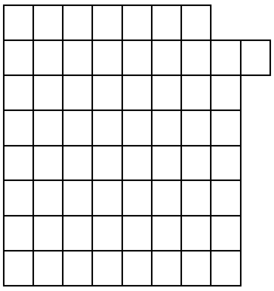
7. חשבו את הסכום $\binom{2000}{1000}2^0+\binom{1999}{999}2^1+\cdots+\binom{1001}{1}2^{999}+\binom{1000}{0}2^{1000}$.

בהצלחה!

כ"ג בחשוון תשע"ט **מחנה סתיו** 1/11/2018

קבוצת רותם – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון



1. טטרומינו היא צורה שמורכבת מ-4 משבצות (יש 5 סוגים של טטרומינו). בוחרים את אחד הסוגים, ורפי מתבקש לרצף עם הצורות מהסוג שנבחר את לוח המשבצות המעוות המוצג בציור (מותר לו לסובב ולשקף את הצורות). עבור אילו סוגים רפי יוכל לעשות זאת?

2. חשבו את הסכום $\binom{1000}{0}2^{1000}+\binom{1001}{1}2^{999}+\cdots+\binom{1999}{999}2^{1}+\binom{2000}{1000}2^{0}$.

3. סדרה מוגדרת על ידי תנאי התחלה $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=9$ וכלל נסיגה $x_n=x_{n-1}^3x_{n-2}+x_{n-2}^3+x_{n-3}$ עבור $n\ge 4$. הוכיחו שלכל שלם חיובי k קיים שלם חיובי n כך ש- $k\,|\,x_n$.

4. במדבר המישורי יש נווה מדבר נקודתי שממנו יוצאים k שבילים ישרים (קרניים שמקורן בנווה המדבר). גמל נמצא במדבר, ומתחיל ללכת בקו ישר שאינו עובר דרך נווה המדבר. בכל פעם שגמל מגיע לשביל, הוא משנה את כיוון הליכתו לכיוון המשוקף ביחס לאנך לשביל. ידוע כי גמל יבצע אינסוף פניות בהליכתו. האם גמל בהכרח יחזור על עקבותיו החל מרגע מסוים?

א. עבור $k=7$

ב. עבור k כללי

בהצלחה!

קבוצת רותם – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. נאמר שהמספרים a,b הם ידידים אם $a^2-b^2 \mid a^3-b^3$. נתון גרף פשוט בעל כמות סופית של קודקודים. הוכיחו שאפשר להתאים מספר שלם חיובי לכל קודקוד, כך ששני קודקודים מחוברים בקשת אם ורק אם המספרים המתאימים להם הם ידידים.

6. מצאו את כל המשולשים ישרי הזווית עבורם אם ניקח מעגל חסום כלשהו (אולי מבחוץ) ונשקף אותו סביב צלע כלשהי של המשולש, נקבל מעגל שמשיק למעגל החוסם של המשולש.

7. הסדרה a_n מוגדרת על ידי $a_1=2$ וכלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2}$. הוכיחו כי לכל N טבעי מתקיים $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k+1}<1$.

בהצלחה!