ד' בתשרי תשע"ח **מחנה סתיו** 24/9/2017

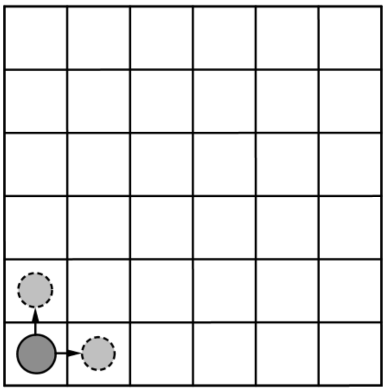
קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. חשבו את

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{200}+\sqrt{201}}+\frac{3}{\sqrt{199}+\sqrt{202}}+\frac{5}{\sqrt{198}+\sqrt{203}}+\ldots+\frac{397}{\sqrt{2}+\sqrt{399}}+\frac{399}{\sqrt{1}+\sqrt{400}}}{\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{201}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{202}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{203}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{199}+\sqrt{399}}+\frac{1}{\sqrt{200}+\sqrt{400}}}.$$

2. פולינום $p(x)$ עם מקדמים שלמים מקיים: לכל k שלם חיובי $p(2^k)$ מתחלק ב- 2^k. בנוסף, קיים m שלם עבורו לכל k שלם חיובי $p(3^k)+m$ מתחלק ב- 3^k. מצאו את כל הערכים האפשריים עבור המספר m.



3. נתון לוח $n\times n$. בתחילת המשחק יש דיסק במשבצת שמאלית תחתונה. בכל מהלך של המשחק לוקחים דיסק כלשהו, ומניחים שני דיסקים: אחד על המשבצת שמעליו, ואחד על המשבצת מימינו (אסור להניח דיסק על משבצת שאינה ריקה). כך, אם דיסק נמצא בצד עליון או ימני של לוח, אז מוסיפים רק דיסק אחד אחרי שמורידים אותו, ואם הוא בפינה שמאלית עליונה אז אפשר פשוט להוריד אותו במהלך אחד. המשחק מסתיים כאשר הלוח ריק. אחרי כמה מהלכים המשחק יסתיים?

4. במשושה קמור ABCDEF האלכסונים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O. בנוסף נתון: AB|| Cl אבל לא מקביל ל-DE, בנוסף $\mathrm{BE}\parallel\mathrm{CD}$, וכן $\mathrm{AD}\parallel\mathrm{EF}$. מה יותר גדול: $S_{\mathrm{OAB}}+S_{\mathrm{OCD}}+S_{\mathrm{OEF}}$ או $S_{\mathrm{OBC}}+S_{\mathrm{ODE}}+S_{\mathrm{OFA}}$?

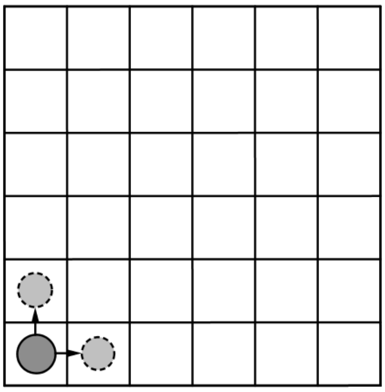
5. הראו כי לכל n טבעי ולכל $d<\frac{n}{2}$ טבעי מתקיים אי-שוויון:

$$\binom{2n}{n}+2\cdot\binom{2n}{n+2d}\geq 2\cdot\binom{2n}{n+d}.$$

בהצלחה!

ד' בתשרי תשע"ח **מחנה סתיו** 24/9/2017

קבוצת רותם



1. נתון לוח $n \times n$. בתחילת המשחק יש דיסק במשבצת שמאלית תחתונה. בכל מהלך של משחק לוקחים דיסק כלשהו, ומניחים שני דיסקים: אחד על המשבצת שמעליו, ואחד על המשבצת מימינו (אסור להניח דיסק על משבצת שאינה ריקה). כך, אם דיסק נמצא בצד עליון או ימני של לוח, אז מוסיפים רק דיסק אחד אחרי שמורידים אותו, ואם הוא בפינה שמאלית עליונה אז אפשר פשוט להוריד אותו במהלך אחד. המשחק מסתיים כאשר הלוח ריק. אחרי כמה מהלכים המשחק יסתיים?

2. מעגל Ω משיק באופן פנימי לשני מעגלים קטנים יותר ω_1 ו-ω_2 שאינם נחתכים. מרכזי ω_1 ו-ω_2 הם O_1 ו-O_2 בהתאמה. משיק פנימי משותף של ω_1 ו-ω_2 משיק להם בנקודות X ו-Y. מעגל שקוטרו XY חותך את הישר $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$ בנקודות P ו-Q. משיק חיצוני משותף של ω_1 ו-ω_2 חותך את Ω בנקודות A ו-B. נניח בנוסף כי האנך האמצעי של קטע AB חותך את האנך האמצעי של הקטע PQ בנקודה Z. הראו כי Z נמצא על Ω.

3. פולינום $p(x)$ עם מקדמים שלמים מקיים: לכל k שלם חיובי $p(2^k)$ מתחלק ב-2^k. בנוסף, קיים m שלם לא אפסי עבורו לכל k שלם חיובי $p(3^k+m)$ מתחלק ב-3^k. מצאו את הכמות המרבית האפשרית של מספרים שלמים n עבורם $p(n)$ הוא מספר חיובי ראשוני.

4. הראו כי לכל n טבעי ולכל $d < \frac{n}{2}$ טבעי מתקיים אי-שוויון:

$$\binom{2n}{n} + 2\cdot\binom{2n}{n+2d} \geq 2\cdot\binom{2n}{n+d}.$$

בהצלחה!

25/9/2017 **מחנה סתיו** ה' בתשרי תשע"ח

תחרות קבוצתית

1. במשושה קמור ABCDEF כל שתי צלעות נגדיות שוות באורכן, והזוויות בקודקודים B ו-F ישרות, ו-4 הקודקודים האחרים נמצאים על מעגל אחד. מצאו נוסחה לאורך של האלכסון AD בהינתן אורכים של כל צלעות המשושה.

2. על מעגל נמצאות 50 נקודות אדומות, 100 נקודות ירוקות ו-120 נקודות כחולות. הנקודות מחלקות את המעגל ל-270 קשתות. ליד כל אחת מקשתות אלה רושמים מספר: אם צבעי הקצוות הם ירוק ואדום רושמים 2, אם זה כחול ואדום רושמים 3, אם זה כחול וירוק רושמים 4, ואם הצבעים זהים רושמים 0. מה הסכום הגדול ביותר האפשרי של מספרים אלה?

3. נתונים פולינומים מתוקנים P,Q כך שמתקיים $P=Q^2$, P בעל מקדמים שלמים. האם בהכרח Q בעל מקדמים שלמים?

4. נגדיר את הפעולה הבאה על שישיות של מספרים:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ -\left(5a_0 + 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + a_4\right) \\ 10a_0 + 6a_1 + 3a_2 + a_3 \\ -\left(10a_0 + 4a_1 + a_2\right) \\ 5a_0 + a_1 \\ -a_0 \end{pmatrix}$$

הראו שאם חוזרים על הפעולה הזאת 6 פעמים, אז תתקבל שוב הסדרה המקורית.

5. הראו כי לכל n קיים מספר חיובי שלם A שברישום העשרוני שלו יש לכל היותר n ספרות, שאף אחת מהן היא לא 4 ולא 5, כך ש-A מתחלק בכל מספר ראשוני שקטן מ-n.

6. שחר בונה סדרה של מספרים טבעיים לפי כלל $a_{n+1}=a_n^2+1$. גיא לוקח לכל מספר בסדרה רק את k הספרות האחרונות (הימניות ביותר), וכך נוצרת סדרה מחזורית. מהו אורך המחזור המקסימלי האפשרי? התשובה עלולה להיות תלויה ב-k.

7. נתון משולש ABC במישור. לכל נקודה D במישור ניתן לבנות את הנקודות הבאות: נקודות P ו-Q שהן עקבי האנכים מ-D לישרים AB ו-AC, נקודות I ו-K שהן עקבי האנכים מ-P ו-Q ל-BC, נקודה M שהיא עקב האנך מ-P ל-AC ונקודה N שהיא עקב האנך מ-Q ל-AB. תארו את המקום הגיאומטרי של נקודות D עבורן K, N, I ו-M נמצאים על מעגל אחד או על ישר אחד.

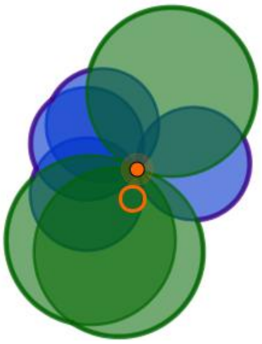
8. רוי בוחר מספר בין 1 ל-96 (כולל), ושרון מנסה לנחש אותו. היא יכולה לשאול את רוי שאלות לגבי המספר של "כן" ו"לא", ורוי עונה על השאלות שלה. אם רוי משקר פעמיים ברצף האוזניים שלו מסמיקות באופן מובהק (ושרון יכולה להבחין בזה). המשחק מסתיים כאשר שרון יכולה לכתוב על דף נייר שני מספרים, שאחד מהם בוודאות מספר שרוי בחר. המטרה של רוי היא לשקר כמה שיותר פעמים לפני שהמשחק מסתיים. הראו ששרון מסוגלת לגרום לכך שרוי ישקר לא יותר מאשר 13 פעמים.

בהצלחה!

ו' בתשרי תשע"ח **מחנה סתיו** 26/9/2017

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

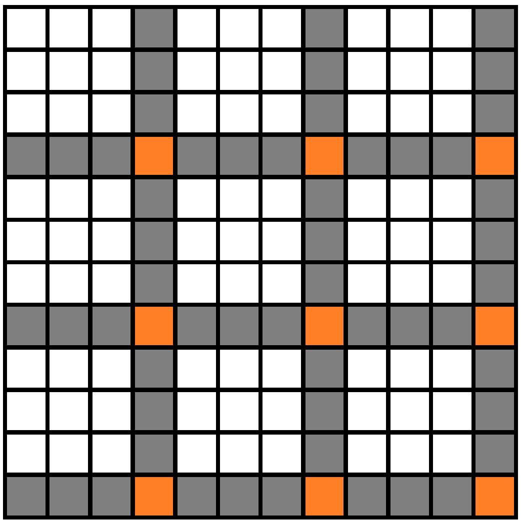


1. על פני שולחן מישורי הניחו מספר מפיות עגולות: חלקם בצבע כחול ורדיוסיהם שווים ל-10, וחלקם בצבע ירוק ורדיוסיהם שווים ל-15, בצורה כזאת שכל אחד מהמעגלים עובר דרך אותה נקודה O. איחוד של כל העיגולים זו צורה שנקרה לה Z. עבור Z, נקודה O היא נקודה פנימית. היקף של Z שווה $48\cdot\pi$, והוא בעצם צבוע בשני צבעים: כחול וירוק.
איזה חלק של היקף ארוך יותר: החלק הכחול או החלק הירוק?

2. עבור מספר שלם n ומספר ראשוני p, נהוג לסמן ב-$v_p(n)$ את המספר הטבעי V הגדול ביותר עבורו n מתחלק ב-p^V. עבור שבר שהוא יחס של שני מספרים שלמים a ו-b, מסמנים $v_p\left(\frac{a}{b}\right)=v_p(a)-v_p(b)$. חשבו את

$$v_5\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}\right).$$

3. נקודות X ו-Y הן קודקודים נגדיים של קוביית יחידה תלת ממדית K. סיבוב ב-60° של K סביב XY מעביר את K ל-S. מצאו את נפח החיתוך של K ו-S.



4. לוח $4n\times 4n$ צבוע כמו שמוצג בציור. לודוויג מציב על לוח זה $4n$ צריחי שחמט שלא מאיימים זה על זה, שאף אחד מהם לא נמצא במשבצת כתומה. האם יהיו יותר צריחים שעומדים על משבצות שחורות או יותר צריחים שעומדים על המשבצות לבנות?

בהצלחה!

26/9/2017 **מחנה סתיו** ו' בתשרי תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. א. בכיתה n תלמידים בעלי שמות שונים. המורה רוצה להרכיב רשימה של זוגות שונים של תלמידים (תלמיד יכול להיות ביותר מזוג אחד) כך שעבור כל שלשה של תלמידים, מבין 3 הזוגות הכוללים רק תלמידים מהשלשה, מספר זוגי מהם יהיה ברשימה. כמה דרכים יש להרכיב רשימה כזאת כאשר רשימות הנבדלות בסדר הזוגות ברשימה או סדר התלמידים בזוג נחשבות לזהות?

ב. כעת המורה רוצה להרכיב רשימה של שלשות שונות של תלמידים כך שעבור כל רביעייה של תלמידים, מבין 4 השלשות הכוללות רק תלמידים מהרביעייה, מספר זוגי מהם יהיה ברשימה. כמה דרכים יש להרכיב רשימה כזאת (עדיין רשימות הנבדלות בסדר השלשות ברשימה או סדר התלמידים בשלשה נחשבות לזהות)?

6. בהינתן $a,b,c\geq 1$, $a+b+c=6$, הוכיחו כי

$$\sqrt{\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)}+\sqrt{\left(b^2-1\right)\left(c^2-1\right)}+\sqrt{\left(c^2-1\right)\left(a^2-1\right)}\leq 9.$$

7. למסיבה הגיעו אנשים, כאשר כל אחד מהם חבר של לפחות עוד שניים. שד השעמום משועמם ורוצה להרוס את המסיבה. הוא בהתחלה בוחר באחד האנשים ומשתלט עליו (הוא לא יכול להחליף). לאחר מכן, השד גורם כל פעם לאדם עליו הוא השתלט לסכסך בין זוג חברים, ואז אחד מהם נעלב ועוזב את המסיבה. בכל רגע, אם למישהו יש לכל היותר חבר אחד במסיבה הוא עוזב את המסיבה (כולל האדם עליו השתלט השד). אם האדם עליו השתלט השד עוזב את המסיבה, השד לא יכול לעשות יותר שום דבר. האם השד יכול בהכרח לגרום לכולם לעזוב את המסיבה?

בהצלחה!

26/9/2017 **מחנה סתיו** ו' בתשרי תשע"ח

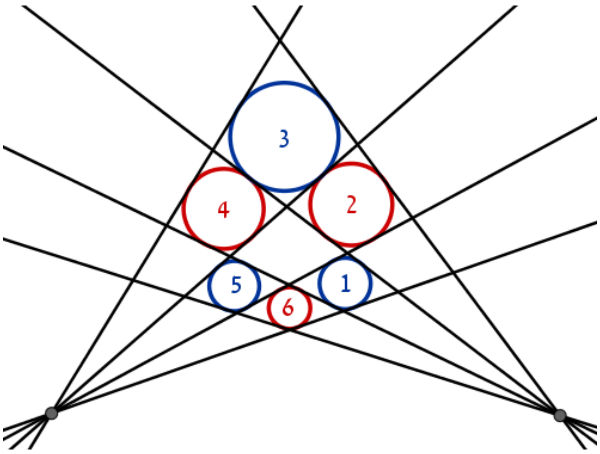
קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. בהינתן $a,b,c,d \geq 1$, $a+b+c+d=8$ הוכיחו כי

$$\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}+\sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}+\sqrt{(c^2-1)(d^2-1)}+\sqrt{(d^2-1)(a^2-1)} \leq 12$$

2. למסיבה הגיעו אנשים, כאשר כל אחד מהם חבר של לפחות עוד שניים. שד השעמום משועמם ורוצה להרוס את המסיבה. הוא בהתחלה בוחר באחד האנשים ומשתלט עליו (הוא לא יכול להחליף). לאחר מכן, השד גורם כל פעם לאדם עליו הוא השתלט לסכסך בין זוג חברים, ואז אחד מהם נעלב ועוזב את המסיבה. בכל רגע, אם למישהו יש לכל היותר חבר אחד במסיבה הוא עוזב את המסיבה (כולל האדם עליו השתלט השד). אם האדם עליו השתלט השד עוזב את המסיבה, השד לא יכול לעשות יותר שום דבר. האם השד יכול בהכרח לגרום לכולם לעזוב את המסיבה?



3. בציור 6 מעגלים, שמוספרו באופן מעגלי. רדיוסיהם $R_1, R_2, \ldots, R_6$.
כל מעגל משיק ל-4 ישרים. הראו כי $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}$.

בהצלחה!