28/11/2017 **מחנה סתיו** י' בכסלו תשע"ח

קבוצת ירדן

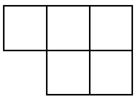
אין להשתמש במחשבון

1. חשבו את $\sum_{n=1}^{10^{10}}\left(\left\lfloor \frac{\sqrt{16n+9}-1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{\sqrt{16n+1}-1}{2}\right\rfloor\right)$.

2. המצולע ABCDEFG משוכלל. האלכסונים AD ו-CE נפגשים ב-K, האלכסונים BE ו-CF נפגשים בנקודת N, האלכסונים BF ו-AE נפגשים ב-I, האלכסונים AF ו-CG נפגשים ב-M. הראו כי הנקודות K, N, I, M נמצאות על ישר אחד.

3. הראו שהמספר $a^3(b+c)^2+b^3(a+c)^2+c^3(a+b)^2$ הוא מכפלה של 3 מספרים שלמים גדולים מ-1, לכל שלושה מספרים שלמים חיוביים a,b,c.

4. נתונה צורה שמורכבת מ-5 משבצות, שהיא מלבן 3×2 ללא משבצת פינתית. הראו שלכל n אפשר לרצף צורה דומה שגדולה ממנה פי n עם צורות כאלה.



5. בקבוצה של 7 איברים נבחרה משפחה של n תתי-קבוצות בגודל 3, שמקיימת את התנאי: לכל שלוש קבוצות A, B, C מתוך המשפחה, $A\cup B$ שונה מ-$A\cup C$.

א. האם יתכן כי $n=14$?

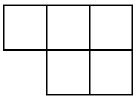
ב. האם יתכן כי $n=13$?

ג. האם יתכן כי $n=12$?

בהצלחה!

28/11/2017 **מחנה סתיו** י' בכסלו תשע"ח

קבוצת רותם



1. נתונה צורה שמורכבת מ-5 משבצות, שהיא מלבן 3×2 ללא משבצת פינתית. הראו שלכל n טבעי אפשר לרצף צורה דומה שגדולה ממנה פי n עם צורות כאלה.

2. המצולע ABCDEFG משוכלל.

א. האלכסונים AD ו-CE נפגשים בנקודה X, האלכסונים BE ו-DG נפגשים ב-Y, האלכסונים AE ו-CF נפגשים ב-Z, האלכסונים BF ו-EG נפגשים ב-T. הראו כי הנקודות T, Z, Y, X נמצאות על ישר אחד.

ב. האלכסונים BD ו-CE נפגשים ב-K, האלכסונים BE ו-CF נפגשים בנקודת N, האלכסונים DG ו-AE נפגשים ב-I, האלכסונים AF ו-EG נפגשים ב-M. הראו כי הנקודות K, N, I, M נמצאות על ישר אחד.

3. מספרים שונים t_1,t_2,t_3 מקיימים את המשוואה

$$\frac{M}{A+t}+\frac{I}{B+t}+\frac{N}{C+t}+\frac{K}{D+t}=S-t^2 .$$

חשבו את $\frac{M}{\prod_{i=1}^{3}(A+t_i)}+\frac{I}{\prod_{i=1}^{3}(B+t_i)}+\frac{N}{\prod_{i=1}^{3}(C+t_i)}+\frac{K}{\prod_{i=1}^{3}(D+t_i)}$.

4. בקבוצה של k איברים נבחרה משפחה של n תתי-קבוצות בגודל 3, שמקיימת את התנאי: לכל שלוש קבוצות שונות A, B, C מתוך המשפחה, $A\cup B$ שונה מ-$A\cup C$.
מהו הערך המקסימלי האפשרי של n
א. עבור $k=7$?
ב. עבור $k=8$?

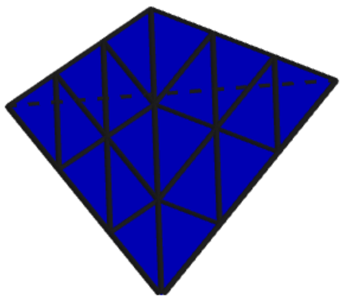
בהצלחה!

29/11/2017 **מחנה סתיו** י"א בכסלו תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

1. נתון ארבעון משוכלל עם אורך צלע 3. כל פאה שלו ריצפו באמצעות משולשים משוכללים עם אורך צלע 1 כמו בציור. שני משולשים נקראים סמוכים אם יש להם צלע משותפת (שני המשולשים לא בהכרח מאותה פאה של הארבעון). בכל משולש קטן יש נורה ומתג. לחיצה על המתג משנה את מצבן של כל הנורות במשולשים הסמוכים למשולש בו נמצא המתג (אך לא את מצב הנורה באותו המשולש). בהתחלה כל הנורות כבויות. האם אפשר להגיע למצב בו כל הנורות דלוקות?



2. מצאו את שארית החלוקה של $2^1 \cdot 4^3 \cdot 6^5 \cdot 8^7 \cdot \ldots \cdot 200^{199}$ ב-101.

3. עבור מספרים חיוביים a,b,c המקיימים $abc=1$ וגם $a^3 \geq 36$ הוכיחו כי

$$\frac{a^2}{3}+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc.$$

4. מרובע ABCD חסום במעגל ω שמרכזו O. מעגל α חוסם את המשולש AOB, ומעגל β חוסם את המשולש COD. הישר BC פוגש את המעגל α בנקודות B ו-X. הישר AD פוגש את המעגל β בנקודות D ו-Y. הוכיחו שהנקודות X, O, Y נמצאים על ישר אחד.

בהצלחה!

י"א בכסלו תשע"ח **מחנה סתיו** 29/11/2017

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. חלקיק נמצא בתוך קובייה בעלת צלע באורך 1. החלקיק נע בקו ישר, ובכל פעם שהוא מתנגש בקיר, הוא חוזר לפי חוק "זווית הפגיעה שווה לזווית החזרה", כלומר, הישר בו הוא מגיע אל הקיר, ℓ_1, והישר בו הוא עוזב את הקיר, ℓ_2, יוצרים זוויות שוות עם הפאה בה הוא פוגע, ובנוסף קיים מישור אשר מכיל את ℓ_1 ו- ℓ_2 ומאונך לפאה בה הוא פגע.
נתון כי מסלול החלקיק מחזורי. אורך המסלול שהחלקיק עובר במהלך מחזור הוא d.
האם ייתכן כי:

א. $d=\sqrt{120}$?

ב. $d=\sqrt{156}$?

6. לכל פולינום f במקדמים שלמים נגדיר $f_n(x):=\overbrace{f\left(f\left(\ldots f(x)\ldots\right)\right)}^{n}$ כאשר f מופיע n פעמים. תארו את כל הפולינומים f עבורם $n \mid f_n(x)-x$ לכל n טבעי ולכל x שלם.

7. הראו שלכל n טבעי מתקיים אי-השוויון

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} \geq \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!\cdot k!\cdot k!} \geq \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}}{n+1}.$$

בהצלחה!

28/11/2017 **מחנה סתיו** י"א בכסלו תשע"ח

קבוצת רותם

1. לכל פולינום f במקדמים שלמים נגדיר $f_n(x) := \overbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}^{n}$ כאשר f מופיע n פעמים. תארו את כל הפולינומים f עבורם $n \mid f_n(x) - x$ לכל n טבעי ולכל x שלם.

2. הראו שלכל n טבעי מתקיים אי-השוויון

$$.\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)! \cdot k! \cdot k!} \geq \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}}{n+1}$$

3. מצאו את הכמות המינימלית של מעגלים שונים במישור, כך שעל כל מעגל נמצאים מרכזים של לפחות k מעגלים שונים, עבור:

א. $k=3$?

ב. $k=4$?

בהצלחה!