3/2/2025 **מחנה פברואר** ה' בשבט תשפ"ה

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. גרף נקרא k-רגולרי, אם כל קודקוד הוא קצה של בדיוק k קשתות. עבור אילו ערכי n, קיים גרף 7-רגולרי בעל n קודקודים?

2. הראו שאם a,b,c חיוביים, אזי $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{4c}{a+b+2c}\geq 2$.

3. נתונים $a_1,a_2,\dots,a_n$ שלמים חיוביים. נסמן
$f_i(k)=a_i^k+a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_{i-1}\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_n$.
הראו כי קיים k שלם חיובי עבורו

$gcd\big(f_1(k),f_2(k),\dots,f_n(k)\big)>1$.

4. נתון מרובע $ABCD$ שחסום במעגל.
נסמן ב-Ω_A את המעגל שעובר ב-A,D ומשיק ל-AB. את מרכזו נסמן ב-O_A.
נסמן ב-Ω_B את המעגל שעובר ב-B,C ומשיק ל-AB. את מרכזו נסמן ב-O_B.
נסמן ב-Γ_C את המעגל שעובר ב-B,C ומשיק ל-CD. את מרכזו נסמן ב-O_C.
נסמן ב-Γ_D את המעגל שעובר ב-A,D ומשיק ל-CD. את מרכזו נסמן ב-O_D.
הוכיחו כי המרובע $O_AO_BO_CO_D$ חסום במעגל.

.

בהצלחה!

3/2/2025 **מחנה פברואר** ה' בשבט תשפ"ה

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. תהי $\mathcal{F}$ משפחה של פונקציות מ-$\mathbb{R}^+$ ל-$\mathbb{R}^+$. ידוע שלכל $f, g \in \mathcal{F}$ קיימת $h \in \mathcal{F}$, עבורה לכל $x, y \in \mathbb{R}^+$, מתקיים:

$$y^2 \cdot f\left(\frac{g(x)}{y}\right) = h(xy)$$

הוכיחו כי לכל $f \in \mathcal{F}$ ולכל $x \in \mathbb{R}^+$ מתקיים ש- $f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1$.

2. נתון מרובע $ABCD$ שחסום במעגל. המשכי הצלעות AD, BC נחתכים ב-E והמשכי הצלעות AB, CD נחתכים ב-F.
נסמן ב-Ω_A את המעגל שעובר ב-A, D ומשיק ל-AB. את מרכזו נסמן ב-O_A.
נסמן ב-Ω_B את המעגל שעובר ב-B, C ומשיק ל-AB. את מרכזו נסמן ב-O_B.
נסמן ב-Γ_C את המעגל שעובר ב-B, C ומשיק ל-CD. את מרכזו נסמן ב-O_C.
נסמן ב-Γ_D את המעגל שעובר ב-A, D ומשיק ל-CD. את מרכזו נסמן ב-O_D.
הוכיחו כי המרובע $O_AO_BO_CO_D$ חסום במעגל שמרכזו נמצא על EF.

3. נתון גרף עם $2n-1$ קודקודים, בו הקליקה המקסימלית היא מגודל n. הוכיחו שקיים קודקוד בגרף שנמצא בכל הקליקות מגודל n.

בהצלחה!

ו' בשבט תשפ"ה **מחנה פברואר** 4/2/2025

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. האם קיימת מילה באורך 102 שיש לה
א. בדיוק 399 תתי-מילים שונות?
ב. בדיוק 400 תתי-מילים שונות?
ג. בדיוק 401 תתי-מילים שונות?
הערה: האורך של כל תת-מילה הוא לפחות 1 ולכל היותר 102.

2. נתונים שני מספרים שלמים חיוביים $a<n$, כך ש- a זר ל- n. נסתכל על סדרת המספרים $x_i = a^i \pmod n$, כך ש- $1 \le x_i \le n$. נסמן ב- k את האינדקס המינימלי עבורו $x_k = 1$. מצאו את כל האפשרויות לזוג a,n עבורן $x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}$ סדרה חשבונית.

3. בהינתן מספרים $a_1, a_2, ..., a_n$ חיוביים, ומספר ממשי $\alpha \ge 1$, הראו כי

$$\left(\frac{a_1^{\alpha+1}}{a_1+1}+\frac{a_2^{\alpha+1}}{a_2+1}+...+\frac{a_n^{\alpha+1}}{a_n+1}\right)\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}+\frac{1}{a_2^{\alpha}}+...+\frac{1}{a_n^{\alpha}}\right)\ge$$
$$\ge\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+...+\frac{1}{a_n+1}\right)$$

4. איילה וברווז משחקים במשחק שמתנהל בשני שלבים. בשלב הראשון, איילה מתחילה וכל שחקן בתורו בוחר מספר שלם חיובי ורושם אותו על הלוח. כאשר על הלוח רשומים 2025 מספרים, השלב הראשון מסתיים. לפני תחילת השלב השני, מינק רושם על הלוח פולינום ממעלה 2024, עם כוכביות במקום מקדמים. בשלב השני, ברווז מתחיל וכל שחקן בתורו בוחר מספר שרשום על הלוח, מוחק אותו, ורושם אותו במקום אחת הכוכביות שנותרו בפולינום. השלב השני מסתיים כאשר כל הכוכביות הוחלפו במספרים. איילה מנצחת אם לפולינום שנוצר קיים שורש שלם, אחרת ברווז מנצח. למי מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?

5. משולש ABC חסום במעגל Ω. נסמן ב- A' את הנקודה הנגדית ל-A על Ω. נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום במשולש וב- I_A, I_B, I_C את מרכזי המעגלים החסומים מחוץ לקודקודים A,B,C, בהתאמה. נסמן ב- S, S_A, S_B, S_C את נקודות החיתוך השניות של Ω עם הישרים $A'I, A'I_A, A'I_B, A'I_B$, בהתאמה. המעגלים $A'SI_A, A'S_AI$ נחתכים שנית בנקודה P והמעגלים $A'S_BI_C, A'S_CI_B$ נחתכים שנית בנקודה Q. הראו כי $AP = AQ$.

6. נתון ארבעון W, לאו דווקא משוכלל. יהא I מרכז הכדור החסום ב-W. קטע נקרא מיוחד אם שני הקצוות שלו נמצאים על המקצועות של W, ואמצע הקטע הוא I. כדור נקרא כאילו חסום ב-W אם הוא משיק לארבעת המישורים של הפאות. הראו כי כמות הכדורים שכאילו חסומים ב-W, ועוד כמות הקטעים המיוחדים שווה ל-8, לכל ארבעון W.

7. נתון שולחן ביליארד מלבני. כדור נע על פני השולחן בקו ישר, וכאשר הכדור מתנגש בקיר הוא מוחזר לפי הכלל: "זוויות הפגיעה שווה לזווית ההחזרה". לאחר N התנגשויות הכדור עוצר. מינק רושם מילה שמורכבת מ-N אותיות לפי הכלל הבא: ברגע שהכדור מתנגש עם אחד משני הקירות האופקיים רושמים H, וברגע שהכדור מתנגש באחד משני הקירות האנכיים רושמים V (האותיות נכתבות משמאל לימין). בצורה זאת מינק יכול לרשום W_N מילים שונות. הראו שקיימים מספרים חיוביים c ו-C כך שלכל N מתקיים: $c \cdot N^3 < W_N < C \cdot N^3$.

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתון מצולע משוכלל בעל 100 צלעות. בתחילת המשחק צפרדע יושבת על אחת הצלעות. הצפרדע בוחרת מספר K שלם כך ש-$1 \le K \le 99$, ומבצעת סדרה של 200 קפיצות באופן הבא: בקפיצות אי-זוגיות, הצפרדע מתקדמת K צלעות עם כיוון השעון, ובקפיצות זוגיות היא מתקדמת $K+1$ צלעות עם כיוון השעון. עבור כמה ערכים שונים של K, לאחר 200 הקפיצות ושני ביקורים בכל צלע הצפרדע חוזרת לצלע המקורית?

2. נתון פולינום $p(x)=(x-1)(x-2^2)(x-3^2)\cdot\ldots\cdot(x-44^2)(x-45^2)$. מצאו את המספר הטבעי d הגדול ביותר כך שלכל n שלם $p(n)$ מתחלק ב- d.

3. סדרה $a_1, a_2, \ldots$ של מספרים ממשיים מקיימת ש-

$$a_n \cdot (a_{n-1} - n + 1) = n \cdot a_{n-1}$$

לכל $n \ge 2$. ידוע שקיימים שלמים חיוביים שונים m, k, l עבורם $a_m = a_k = a_l$. מצאו את כל האפשרויות ל-a_1.

4. נתון משושה קמור $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. לנקודה A_1 נקרא גם A_7. עבור $1 \le i \le 6$, בונים משולשים משוכללים $A_iB_iA_{i+1}$ עם מרכזים ב- C_i; עבור i אי-זוגי המשולשים מופנים החוצה מהמשושה, ועבור i זוגי המשולשים מופנים פנימה אל תוך המשושה. אמצעי הקטעים C_1C_3, C_4C_6 יסומנו M, N בהתאמה. מצאו את $\frac{C_2C_5}{MN}$.

בהצלחה!