תחרות קבוצתית

1. יהי משולש ABC החסום במעגל Ω שמרכזו O. נסמן ב-H את מפגש הגבהים במשולש וב-D את החיתוך השני של AH עם Ω. תהי E נקודה על AB כך ש-$BC||OE$. הישרים DE ו-BC נחתכים ב-L. הראו כי עקב האנך מ-L ל-AC נמצא על האנך מ-H ל-AO.

2. יהי p ראשוני ו-$n \geq p$ שלם. נתון לוח $n \times n$ שבו בכל משבצת יש נורה. בהתחלה כל הנורות דולקות. בכל מהלך, ניתן לבחור מלבן $p \times 1$ או $1 \times p$ ולהחליף את המצב של כל הנורות בו. מצאו את כל הזוגות (n, p) עבורם ניתן להגיע למצב שבו יש רק נורה דולקת אחת.

3. הראו כי קיים קבוע חיובי c, עבורו לכל n שלם חיובי, קיימים x, y שלמים חיוביים, כך שמתקיים:

$$x^2 + y^2 = (n^2+1)^{\lfloor \pi n \rfloor}, \qquad x > cny.$$

4. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורן מתקיים ש-

$$f(xyz) = f(x) + f(y) + f(z)$$

לכל $x + y + z = 1$.

5. מצולע בעל n צלעות ייקרא שפוי אם הוא חסום במעגל ומכיל את מרכז המעגל החוסם. האם קיימים מצולעים שפויים $\mathcal{A} = A_1A_2 \dots A_n, \mathcal{B} = B_1B_2 \dots B_n$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $A_iA_{i+1} < B_iB_{i+1}$, וגם השטח של $\mathcal{A}$ גדול מהשטח של $\mathcal{B}$?

6. יהי משולש ABC ויהיו ω_B, ω_C המעגלים החסומים מחוץ לקודקודים B, C בהתאמה. נסמן ב-ℓ_B את המשיק ל-ω_B שמאונך ל-BC ונחתך עם הקטע BC. באופן דומה, נסמן ב-ℓ_C את המשיק ל-ω_C שמאונך ל-BC ונחתך עם הקטע BC. תהי P נקודה על ℓ_B כך ש-$BP \perp AC$ ותהי Q נקודה על ℓ_C כך ש-$CQ \perp AB$. נסמן ב-X את החיתוך של BQ עם CP. הראו כי X נמצאת במרחקים שווים מ-ℓ_B, ℓ_C.

7. במשבצות של לוח $n \times n$ רשומים המספרים $1, 2, \dots, n^2$, כל מספר פעם אחת. בכל מהלך, ניתן לבצע את אחת משתי הפעולות הבאות:

- לבחור משבצת שהמספר שרשום בה גדול מהמספר שרשום במשבצת מתחתיה, ולהחליף בין המספרים בשתי המשבצות.
- לבחור משבצת שהמספר שרשום בה גדול מהמספר שרשום במשבצת משמאלה, ולהחליף בין המספרים בשתי המשבצות.

על פני כל הלוחות האפשריים, מצאו את הכמות הגדולה ביותר של מהלכים שניתן לבצע בתהליך זה.