

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתון לוח משבצות אינסופי, בכל צלע בין שתי משבצות סמוכות יש דלת חד כיוונית שמחברת בין שתי המשבצות. לכל משבצת יש שתי דלתות שנכנסות אליה ושתיים שיוצאות ממנה. הוכיחו כי מכל משבצת ניתן להגיע לאינסוף משבצות.

2. יהיו P, Q פולינומים עם מקדמים ממשיים, ממעלה n . מה היא הכמות הגדולה ביותר האפשרית של פתרונות חיוביים למשוואה:

$$x^{P(x)} + \frac{1}{x^{P(x)}} = x^{Q(x)} + \frac{1}{x^{Q(x)}}$$

3. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלע BC בנקודה D . חוצי הזוויות החיצוניים של $\angle ABC, \angle ACB$ נחתכים בנקודה I_A . המעגל החסום במשולש ABC נחתך שנית עם המעגלים BDI_A, CDI_A בנקודות P, Q בהתאמה. הראו כי $\angle BAP = \angle QAC$.

4. יהי $n \geq 2$ שלם. האם קיימים a, b, c שלמים חיוביים עבורם מתקיים:

$$\begin{cases} a^n - 2b^n = 1 \\ b^n - 2c^n = 1 \end{cases}$$

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. יהי $n \geq 2$ שלם. האם קיימים a, b, c שלמים חיוביים עבורם מתקיים:

$$\begin{cases} a^n - 2b^n = 1 \\ b^n - 2c^n = 1 \end{cases}$$

2. נתון גרף עם 10^{100} קודקודים שבו אורך של כל מעגל אי-זוגי גדול מ-100. הראו כי ניתן למצוא בגרף אנטי-קליקה שמכילה לפחות $\frac{1}{102}$ מכלל קודקודי הגרף.

3. יהי מרובע $ABCD$ החסום במעגל שמרכזו O . חוצי הזוויות הפנימיים של $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDA$ יוצרים מרובע קמור Q_1 . ארבעת חוצי הזוויות החיצוניים של אותן הזוויות יוצרים מרובע קמור Q_2 .

הוכיחו כי המרובעים Q_1, Q_2 חסומים במעגלים, וש- O הוא אמצע הקטע שמחבר את מרכזי המעגלים החוסמים של Q_1, Q_2 .

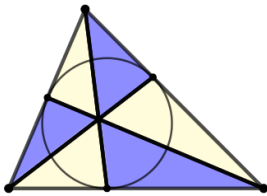
בהצלחה!

תחרות קבוצתית ירדן
אין להשתמש במחשבון

1. תמורה σ של $1, \dots, n$ תקרא חמודה אם לכל i מתקיים ש- $|\sigma(i) - i| \leq 1$. מצאו את כמות התמורות החמודות.

2. במשושה ABCDEF כל הזוויות שוות. אלכסונו AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת. הראו כי $AB = DE$.

3. נתונה סדרה אינסופית של מספרים שלמים חיוביים $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. לכל n שלם חיובי המספר x_{n+1} מתקבל מהמספר x_n על ידי מחיקה של הספרה הימנית ביותר של x_n , והוספה שלה בתור הספרה השמאלית ביותר. אם הספרה הימנית ביותר של x_n היא 0, היא נמחקת ושום דבר לא מתווסף בצד שמאל. לדוגמה: אם $x_n = 2345$ אז $x_{n+1} = 5234$ ואם $x_n = 2130$ אז $x_{n+1} = 213$. המספר x_1 יקרא **מיוחד** אם קיימים a, b ממשים ו- N שלם חיובי, כך שלכל $n \geq N$ שלם מתקיים $x_{n+1} = ax_n + b$. מצאו את כמות המספרים המיוחדים בעלי M ספרות בדיוק.



4. נתון משולש ABC שהמעגל החסום בו משיק לצלעות BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. ידוע שהקטעים AD, BE, CF נפגשים בנקודה G ומחלקים את המשולש לשישה חלקים. ששת החלקים נצבעו בכחול ולבן לסירוגין. מצאו את כל המשולשים ABC עבורם סכום השטחים הכחולים שווה לסכום השטחים הלבנים.

5. במרחב נמצאות 100 נקודות. קיפוד מדד את המרחק בין כל שתי נקודות ורשם את $\binom{100}{2}$ המספרים שהתקבלו על דף נייר בסדר אקראי. דורבן בנה אוסף של 100 נקודות שהמרחקים ביניהם הם אותה הרשימה של $\binom{100}{2}$ המספרים (לא בהכרח באותו סדר). האם זה נכון שבאמצעות הזזות, סיבובים ושיקופים ניתן להעביר את אוסף הנקודות של דורבן לאוסף הנקודות של קיפוד?

6. פתרו בשלמים:

$$a^3 + b^3 = 10(a^2b + b^2a) + 10^{5785}$$

7. נתון טרמינו בצורת פינה (3 משבצות מחוברות לפי צלע לא בקו ישר). נגיד שאחד מבין 81 קודקודי המשבצות של לוח 8×8 שייך לצורה אם הוא אחד מבין קודקודי המשבצות שמרכיבות אותה. מהי הכמות המרבית של טרמינואים שניתן למקם על הלוח אם לכל זוג טרמינואים יש לכל היותר קודקוד אחד ששייך לשניהם?

8. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן לכל $x, y \in \mathbb{R}$, אם $x + y$ רציונלי אז גם $f(x) + f(y)$ רציונלי.

בהצלחה!

מבחן בעל פה

דף איילה

1. איילה בוחרת 100 נקודות אדומות ו-100 נקודות כחולות במישור, אף 3 לא על ישר. איילה מעבירה את כל הקטעים המחברים בין נקודה אדומה לנקודה כחולה. איילה צובעת כל נקודת חיתוך בין שני קטעים בירוק. מצאו את המספר המירבי של נקודות ירוקות שאיילה יכולה לקבל.

2. האם קיימים פולינומים לא קבועים P_1, P_2, \dots, P_n כך שלכל $1 \leq i < j \leq n$ ולכל m שלם חיובי, מתקיים:

$$\gcd(P_i(m), P_j(m)) = 1$$

3. המעגל החסום מחוץ לקודקוד A של משולש ABC , משיק לצלע BC בנקודה D ולהמשכי הצלעות AB, AC בנקודות P, Q . המעגל החסום מחוץ לקודקוד B משיק לצלע AC בנקודה E והמעגל שחסום מחוץ לקודקוד C משיק לצלע AB בנקודה F . הראו כי הישרים AD, EQ, PF נפגשים בנקודה אחת.

4. פתרו את המערכת הבאה עבור x, y ממשיים:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 8x + 7)^2 + (x^2 + y^2 - 6y + 5)^2 + (x^2 + y^2 - 1)^2 &= \\ &= (3x^2 + 3y^2 - 8x - 6y + 11)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - 8x + 7)^3 + (x^2 + y^2 - 6y + 5)^3 + (x^2 + y^2 - 1)^3 &= \\ &= (3x^2 + 3y^2 - 8x - 6y + 11)^3 \end{aligned}$$

בהצלחה!

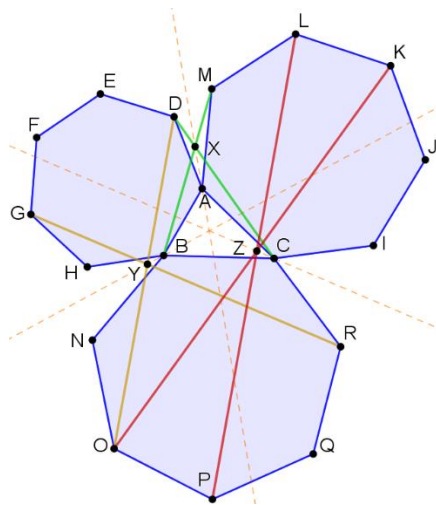
מבחן בעל פה

דף ברווז

5. נתונים 25 מטבעות זהים למראה במשקלים $1, 2, 3, \dots, 25$. לברווז יש מכשיר מיוחד, שניתן להניח עליו שני מטבעות, והוא יראה את ההפרש בין משקליהם. ברווז רוצה לגלות את המשקל של מטבע כלשהו.

א. הראו כי ברווז יצליח במשימתו תוך 25 פעולות.

ב. הראו כי ברווז לא יצליח במשימתו בפחות מ-24 פעולות.



6. על צלעות המשולש ABC , כלפי חוץ, נבנו משובעים משוכללים, כמתואר בציור. הקטעים DO, RG הקטעים X . BM, CD נחתכים בנקודה Y . הקטעים KO, LP נחתכים בנקודה Z . הראו כי הישרים AX, BY, CZ נחתכים בנקודה אחת.

7. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ עבורן לכל m, n מתקיים:

$$f(m)f(n) + m \mid mf(n) + f(m)$$

בהצלחה!