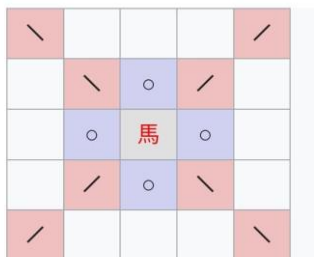


קבוצת ירדן

דף איילה

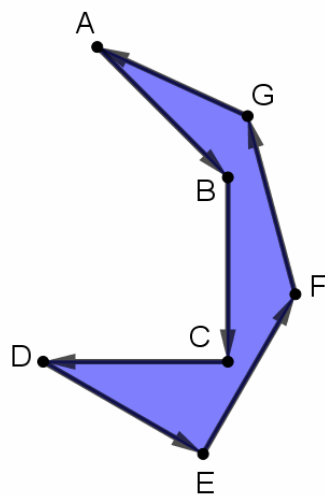
1. יהי  $n$  שלם חיובי, נסמן ב- $D$  את המחלק הגדול ביותר של  $n$  ששונה מ- $n$ . האם יתכן ש- $n + D$  הוא חזקה שלמה של 5785?

2. רץ מלכותי יכול לעבור במהלך למשבצת סמוכה כלשהי, או לכל משבצת באותו האלכסון. מהו המספר המרבי של רצים מלכותיים, שניתן להציב על לוח  $9 \times 9$ , מבלי שיאיימו זה על זה?



3. מצאו את כל הפונקציות  $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  כך שלכל  $x > 0$  מתקיים

$$f(x) + f(x+1) = \frac{2}{x(x+2)}$$



4. נמלה מתחילה מנקודה A, הולכת מטר 1 ישר עד לנקודה B ושם פונה ימינה ב- $45^\circ$ , הולכת מטר 1 ישר עד לנקודה C ושם פונה ימינה ב- $90^\circ$ , הולכת מטר 1 ישר עד לנקודה D שם פונה שמאלה ב- $150^\circ$ , הולכת מטר 1 ישר עד לנקודה E ושם פונה שמאלה ב- $90^\circ$ , אחרי זה הולכת מטר אחד עד לנקודה F ושם פונה שמאלה ב- $45^\circ$  והולכת עוד מטר לנקודה G. בנקודה G היא פונה לכיוון הנקודה A וחוזרת לשם ישירות. מצאו את שטח המצולע ABCDEFG שתחום על ידי מסלול הנמלה.

בהצלחה!

## קבוצת ירדן

## דף ברווז

5. יהי לוח  $8 \times 8$ . הלוח ברווזי על הלוח הוא מסלול שמתחיל בפינה השמאלית התחתונה, נגמר בפינה הימנית העליונה ובכל מהלך מתקדם משבצת אחת ימינה או למעלה. מצאו את כל משבצות הלוח שדרכן עוברת כמות מקסימלית של הלוחים ברווזיים, להוציא מהמשבצת ההתחלתית והמשבצת הסופית של המסלול.

6. במשולש רדיוסי המעגלים החסומים מבחוץ שווים ל- $r_a, r_b, r_c$  (כאשר  $r_a$  משיק לצלע מאורך  $a$ ). הראו

$$\text{כי } \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b + r_c} \geq \frac{\sqrt{3}}{a}$$

7. סדרה מתחילה במספר רציונלי  $1 < x_1$ , ובהמשך מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n}{\lfloor x_n \cdot n \rfloor} \cdot x_k = 1 \text{ עבורו } k$$

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. סדרה מתחילה במספר רציונלי  $x_1 < 1$ , ובהמשך מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n}{\lfloor x_n \cdot n \rfloor} . x_k = 1 \text{ עבורו } k$$

2. נתון משולש ABC, שחסום במעגל  $\Omega$ . מרכז המעגל החסום הוא I, ומרכז המעגל החסום מבחוץ מול A הוא  $I_A$ . אמצע הקשת BAC יסומן N. הישר  $NI_A$  פוגש שנית את  $\Omega$  בנקודה T. האנך ל-AI בנקודה I חותך את הצלעות AC ו-AB בנקודות E ו-F בהתאמה. המעגל החסום של BFT חותך שנית את  $BI_A$  בנקודה P. המעגל החסום של CET חותך שנית את  $CI_A$  בנקודה Q. הראו כי עובר בנקודה הנגדית ל-A על  $\Omega$ .

**בהצלחה!**

## תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. לכל  $m$  טבעי נסמן ב- $S(m)$  את סכום הספרות של  $m$ . בהינתן  $a_1$  טבעי, נגדיר את הסדרה  $a_n$  על ידי  $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$ . עבור אלו ערכים התחלתיים  $1 \leq a_1 \leq 9$  המספר 2,000,052 מופיע בסדרה?

2. נתונות שלוש נקודות במישור  $A_0, B, C$ . נקודת מפגש חוצי הזוויות של המשולש  $A_0BC$  תסומן  $A_1$ . נקודת מפגש חוצי הזוויות של המשולש  $A_1BC$  תסומן  $A_2$ , וכן הלאה. הראו שהסדרה  $A_1, A_2, \dots$  מתכנסת ומצאו את נקודת ההתכנסות.

3. נתון כי  $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)(\cot^4 x + 1)\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \tan^2 x\right) = 1$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , מצאו מספר טבעי  $n$  עבורו  $\cos^n x = \sin^{2024} x$ .

4. זוג מספרים שלמים חיוביים  $(a, b)$  יקרא מיוחד אם קיימים שלמים  $m, n$  כך ש- $a^2 + b^2 = m^3$  ו- $a^3 + b^3 = n^2$ . האם קיימים אינסוף זוגות מיוחדים  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  כך שלכל  $i \neq j$  מתקיים ש- $a_i, a_j$  זרים?

5. מצאו את הכמות המקסימלית של נקודות שאפשר לסמן במישור, כך שאף ארבע מהן לא על ישר אחד, אבל מתוך כל חמש יש שלוש על ישר אחד.

6. נתון מעגל  $\Omega$  שמרכזו  $O$ . יהי  $AB$  מיתר של  $\Omega$  ותהי  $C$  נקודה על המיתר. האנך האמצעי של  $AC$  נחתך עם  $\Omega$  בנקודות  $P, Q$ . האנך האמצעי של  $BC$  נחתך עם  $\Omega$  בנקודות  $R, S$ , כך ש- $P, R$  נמצאות מאותו הצד של  $AB$ . נסמן ב- $X$  את נקודת החיתוך של  $AR$  עם  $BP$ . הוכיחו כי  $\angle AXC = \angle OXB$ .

7. איילה בחרה מספרים ממשיים  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  (שברווז לא יודע אותם). בכל מהלך ברווז יכול לשאול אותה לגבי 10 מהמספרים  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  ואיילה תגיד לו את ערך המספר הגדול ביותר. הראו שבאמצעות 256 שאלות ברווז יוכל לגלות את האינדקסים של 89 המספרים הגדולים ביותר (ברווז לא חייב לגלות את הערכים שלהם).

**בהצלחה!**