

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. עבור מספר טבעי n נסמן ב- a_n את המספר הטבעי המקסימלי המקיים:

$$(a_n)! \left| \prod_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right|$$

הראו כי קיימים אינסוף שלמים m עבורם $a_{m+1} < a_m$.

2. משולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. מרכז המעגל החסום יסומן ב-I. השיקוף של המשיק ל- Ω בנקודה A, ביחס לישר EF יסומן ℓ_A . באופן דומה נגדיר את ℓ_B, ℓ_C . הוכיחו כי מפגש הגבהים של המשולש שצלעותיו הן ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C נמצא על OI.

3. עבור קבוצה סופית S של לפחות 3 נקודות במישור, נסמן ב- d_{min} את המרחק המינימלי בין שתי נקודות שונות ב-S וב- d_{max} את המרחק המקסימלי בין שתי נקודות שונות ב-S.

עבור $c > 0$ ממשי, קבוצה S תקרא c-מאוזנת אם

$$\frac{d_{max}}{d_{min}} \leq c|S|$$

הראו שקיים מספר $c > 0$ עבורו בכל קבוצה c-מאוזנת S, קיים משולש עם קודקודים ב-S שבתוכו או על השפה שלו יש לפחות $\sqrt{|S|}$ נקודות מ-S.

בהצלחה!