18/3/2024 **מחנה פורים** ח' אדר ב' תשפ"ד

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. משולש ABC חסום במעגל Ω. חוצה הזווית של $\angle BAC$ נחתך עם BC, Ω בנקודות S, D בהתאמה. נסמן ב-M, N את אמצע הקטעים AB, AD בהאתמה. הוכיחו כי SM ו-CN נחתכים על Ω.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שלכל x, y ממשיים מתקיים:

$$f^3(x) + f^5(y) = x + y.$$

הערה: $f^k(x)$ מסמן את ההרכבה של f על עצמה k פעמים.

3. נתונה סדרה $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ של מספרים שלמים חיוביים כך ש-$0 < a_{i+1} - a_i \leq 5784$ לכל i. הוכיחו כי ניתן לבחור כמות אינסופית של איברי הסדרה כך שקיים מספר $d > 1$ שמחלק את כולם.

4. איילה מסדרת 2024 מטבעות במעגל, חלקם עם עץ כלפי מעלה וחלקם עם פאלי כלפי מעלה.
איילה וברווז משחקים בתורות, ברווז מתחיל ויכול לעצור את המשחק בכל רגע נתון.
ברווז בתורו בוחר מטבע והופך אותו. איילה בתורה בוחרת 1012 מטבעות רצופים במעגל והופכת את כולם. בסוף המשחק ברווז מקבל דגים ככמות הרצפים של מטבעות זהים במעגל. כמה דגים ברווז יוכל להבטיח לעצמו?

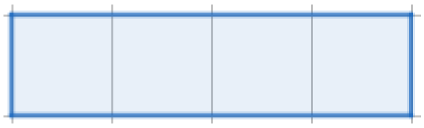
בהצלחה!

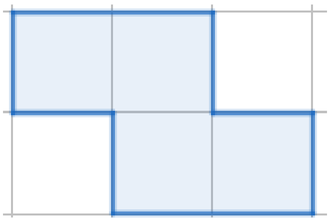
19/3/2024 **מחנה פורים** ט' אדר ב' תשפ"ד

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הזוגות (m, n) של שלמים חיוביים עבורם ניתן לרצף מלבן $m \times n$ בעזרת שתי הצורות הבאות (מותר לשקף ולסובב):





2. יהא $n \geq 3$ שלם ויהי פולינום P ממעלה n שהמקדם המוביל שלו חיובי. ידוע שלכל $0 \leq x \leq n$ שלם מתקיים:

$$.2 \cdot \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < P(x) < 2 \cdot \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$$

הוכיחו כי המקדם של x^{n-1} קטן מ-0.

3. נתונה סדרה $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ של מספרים רציונליים שמקיימת את תנאי הנסיגה:

$$\forall n \geq 4, \qquad a_n = \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)^2 \cdot a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

הוכיחו כי לכל ראשוני p גדול מספיק, קיים n שלם חיובי כך ש-p מחלק את המונה של a_n (כאשר a_n נכתב כשבר מצומצם).

4. נתון מעגל Ω ו-6 נקודות עליו A, B, C, D, E, F לפי סדר זה.
המעגל שעובר דרך A, B ומאונך ל-Ω יסומן Γ_1. נגדיר באופן ציקלי גם את המעגלים $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$.
נסמן ב-a, b את המשיקים הפנימיים המשותפים של Γ_1, Γ_4,
נסמן ב-c, d את המשיקים הפנימיים המשותפים של Γ_2, Γ_5,
נסמן ב-e, f את המשיקים הפנימיים המשותפים של Γ_3, Γ_6.
הוכיחו כי ששת הישרים a, b, c, d, e, f משיקים למעגל אחד.

5. נקודה במישור הקרטזי תקרא שלמה אם שתי הקואורדינטות שלה שלמות. נתון משולש שקודקודיו בנקודות שלמות ושטחו שלם. הוכיחו כי ניתן לחלק את המשולש למשולשים בעלי שטח 1 שכל הקודקודים שלהם נמצאים בנקודות שלמות.

6. נתון לוח משבצות אינסופי לבן. איילה וברווז משחקים בתורות, איילה מתחילה. איילה צובעת משבצות באדום וברווז בכתום. המטרה של איילה היא ליצור מסלול מעגלי אדום שמכיל לפחות 4 משבצות, כך שכל שתי משבצות עוקבות במסלול חולקות צלע משותפת. למי יש אסטרטגיה מנצחת כאשר:

א. בכל תור איילה צובעת משבצת לבנה אחת באדום וברווז צובע משבצת לבנה אחת בכתום?

ב. בכל תור איילה צובעת שתי משבצות לבנות באדום וברווז צובע שלוש משבצות לבנות בכתום?

7. נתון מרובע ABCD החסום במעגל Ω. אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה E.
האנך מ-A ל-CD נפגש עם האנך מ-B ל-AD ועם האנך מ-D ל-BC בנקודות X ו-W בהתאמה.
האנך מ-C ל-AB נפגש עם האנך מ-B ל-AD ועם האנך מ-D ל-BC בנקודות Y ו-Z בהתאמה.
הוכיחו כי המרובע XYZW חסום במעגל Γ וש-E נמצאת על הציר הרדיקלי של Ω ו-Γ.

8. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ כך שלכל m, n שלמים חיובים

$$mf(n+1) + f(n)f(m+1) | f(mn+1) + mf(n)$$

וגם $\gcd\big(f(n), f(n+1)\big) = 1$.

בהצלחה!

20/3/2024 | **מחנה פורים** | י' אדר ב' תשפ"ד

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו בממשיים את מערכת המשוואות הבאה:

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 = 3$$

$$17x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4y^3x + 17y^4 = 3$$

2. על הצלעות AB, BC, CD, DE, EA של מחומש קמור $ABCDE$ נבחרו נקודות P, U, R, I, M כך שמתקיים:

$$\angle API = \angle RPB, \angle BUM = \angle IUC, \angle CRP = \angle MRD, \angle DIU = \angle PIE, \angle EMR = \angle UMA.$$

נתון ש-AR, BI, CM, DP הם גבהים במחומש. הוכיחו כי EU גם הוא גובה במחומש.

הערה: גובה במחומש הוא ישר העובר בקודקוד ומאונך לצלע הנגדית.

3. מצאו את כל השלשות (p, q, r) של מספרים ראשוניים עבורן מתקיים:

$$p + q | p^q - 1$$
$$q + r | q^r - 1$$
$$r + p | r^p - 1$$

4. נתון גרף קשיר G עם n קודקודים ולפחות n קשתות. הוכיחו כי אפשר לצבוע את הקודקודים של G בכחול ואדום, כך שמתקיימים שלושת התנאים הבאים:

i. יש לפחות קודקוד אחד בכל צבע,
ii. יש כמות זוגית של קשתות שמחברות קודקוד אדום לקודקוד כחול,
iii. ואם מוחקים את כל הקשתות הנ"ל, נותרים עם שני גרפים קשירים.

בהצלחה!

20/3/2024 **מחנה פורים** י' אדר ב' תשפ"ד

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. נתון גרף קשיר G עם n קודקודים ולפחות n קשתות. הוכיחו כי אפשר לצבוע את הקודקודים של G בכחול ואדום, כך שמתקיימים שלושת התנאים הבאים:

i. יש לפחות קודקוד אחד בכל צבע,

ii. יש כמות זוגית של קשתות שמחברות קודקוד אדום לקודקוד כחול,

iii. אם מוחקים את כל הקשתות הנ"ל, נותרים עם שני גרפים קשירים.

2. יהי n שלם חיובי. מצאו את כל הפולינומים $Q(x)$, עם מקדמים שלמים, כך שהמעלה של $Q(x)$ קטנה מ-n וקיים $m \geq 1$ שלם כך ש-

$$x^n - 1 | Q(x)^m - 1 .$$

3. נתונה מקבילית $ABCD$.

נסמן ב-ω_1 את המעגל שעובר ב-D ומשיק ל-AB בנקודה A.
נסמן ב-ω_2 את המעגל שעובר ב-A ומשיק ל-CD בנקודה D.
המשיקים מ-B ל-ω_1 משיקים לו בנקודות A ו-P.
המשיקים מ-C ל-ω_2 משיקים לו בנקודות D ו-Q.
הישרים AP, DQ נחתכים בנקודה X. החיתוך של AD עם האנך האמצעי של BC יסומן ב-R.
הוכיחו כי המעגלים החוסמים של המשולשים PQX ו-BCR הם בעלי מרכז משותף.

בהצלחה!