

קבוצת ירדן – מבחן בעל פה

אין להשתמש במחשבון

דף איילה

1. מצאו את כל הזוגות של מספרים ראשוניים (p, q) עבורם מתקיים:

$$p^{2q} - q^{2p} = p^2 - q^2 + 2pq - p - q$$

2. במישור סומנו נקודה O ו- n קטעים שאורכיהם a_1, a_2, \dots, a_n . המרחקים מ- O עד לקטעים הם d_1, d_2, \dots, d_n בהתאמה; המרחק מנקודה לקטע שווה למרחק הקצר ביותר לאיזושהי נקודה של הקטע.ידוע בנוסף כי כל קרן שמתחילה ב- O פוגשת k קטעים לפחות. הוכיחו כי $\frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \geq 2\pi k$.3. במשולש ABC , הנקודות M ו- N הם אמצעי הצלעות AB ו- AC בהתאמה. תהי P נקודה על המשך AC מעבר ל- A כך ש- $\angle BPA = \angle ABN$. תהי Q נקודה על המשך AB מעבר ל- A כך ש- $\angle CQA = \angle ACM$. נסמן ב- X וב- Y את אמצעי הקטעים BP ו- CQ בהתאמה. הוכיחו כי המעגלים החוסמים של BXN ו- CYM נחתכים על הישר BC .4. איילה וברווז משחקים משחק על לוח $2n \times 2n$ שבהתחלה כל המשבצות שלו לבנות. בצעד שלה, איילה צובעת באדום חצי ממשבצות הלוח, ולאחר מכן ברווז צובע חלק מהמשבצות שנשארו בכתום, כך שאין שתי משבצות כתומות סמוכות לפי צלע. מהי הכמות הגדולה ביותר של משבצות שברווז תמיד יוכל לצבוע בכתום, ללא תלות בצביעה של איילה?**בהצלחה!**

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

דף ברווז

5. נסמן באמצעות $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ את סדרת המספרים הראשוניים. מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים k, N עבורם מתקיים

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i + k} = 1$$

6. נתון כי $\frac{\sin^{10} \alpha}{\sin^8 \beta} + \frac{\cos^{10} \alpha}{\cos^8 \beta} = 1$. מצאו את הערך של $\frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha}$.

7. נתון משולש חד זוויות ABC המקיים $\angle BAC = 60^\circ$. המעגל החוסם של ABC יסומן ב- Ω , ומפגש הגבהים שלו יסומן ב-H. נסמן ב-S את אמצע הקשת BC שלא מכילה את A. נקודה P נבחרה על Ω כך ש- $\angle HPS = 90^\circ$. הוכיחו כי קיים מעגל שעובר ב-P וב-S ומשיק לישרים AB ו-AC.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. נתון משולש חד זוויות ABC המקיים $\angle BAC = 60^\circ$. המעגל החוסם של ABC יסומן ב- Ω , ומפגש הגבהים שלו יסומן ב- H . נסמן ב- S את אמצע הקשת BC שלא מכילה את A . נקודה P נבחרה על Ω כך ש- $\angle HPS = 90^\circ$. הוכיחו כי קיים מעגל שעובר ב- P וב- S ומשיק לישרים AB ו- AC .

2. יהי $n > 1$ טבעי, לכל גרף G עם n קודקודים v_1, \dots, v_n נסמן ב- $k(G)$ את הערך המינימלי כך שקיימות n תיבות מלבניות k -מימדיות R_1, \dots, R_n במערכת צירים k -מימדית כך שמקצועותיהם מקבילים לצירים, ולכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים ש- R_i ו- R_j נחתכים אם ורק אם יש קשת בין v_i ו- v_j ב- G . נגדיר M להיות הערך המקסימלי האפשרי של k על פני כל הגרפים בעלי n קודקודים. מצאו את הערך של M כפונקציה של n .

3. נתון מספר טבעי n וראשוני p מהצורה $8k + 5$. פולינום ממעלה לכל היותר 2023 (יכול להיות קבוע) עם מקדמים שלמים אי-שליליים שקטנים שווים ל- n ייקרא מגניב אם

$$p \mid Q(2) \cdot Q(3) \cdot \dots \cdot Q(p-2) - 1$$

הוכיחו שכמות הפולינומים המגניבים היא זוגית.

בהצלחה!

1. נתון גרף קשיר על 2023 קודקודים, שחלקם צבועים בכחול והיתר בלבן. מבצעים את התהליך הבא:

- תחילה, כותבים בכל קודקוד כחול את המספר 1.
- בכל קודקוד לבן שיש לו לפחות שכן אחד כחול, כותבים את סכום המספרים בקודקודים הכחולים הסמוכים אליו.
- צובעים בכחול את כל הקודקודים הלבנים שכתבנו בהם מספר בשלב הקודם.

חוזרים על צעדים ב' ו-ג' עד שכל הגרף צבוע בכחול. כמות המספרים השונים בגרף בסוף התהליך תסומן ב- N . מהו הערך המקסימלי האפשרי של N ?

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, עבורן לכל $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ מתקיימים התנאים הבאים.

$$f(x) + f(y) \neq 2$$

$$\frac{f(x) + f(y) - 1}{f(x) + f(y) - 2} = f\left(\frac{1}{x+y}\right)$$

3. נתון משולש משוכלל ABC עם צלע באורך 1 ונקודה P בתוכו. מהקטעים PA, PB, PC בונים משולש ששטחו S . מהו הערך המקסימלי האפשרי של S ?

4. מצאו את כל הזוגות של מספרים ראשוניים (p, q) עבורם מתקיים

$$q^p - p^{q-2p} = q - p$$

5. המשולש החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. אמצע הקשת \widehat{BAC} תסומן ב- N ואמצע הצלע BC תסומן ב- M . מרכז המעגל החסום מבחוץ במשולש מול הקודקוד A יסומן ב- I_A . הוכיחו כי הישרים MI_A, DN ו- EF נפגשים בנקודה.

6. לב כתב את המספרים 1, 2, ..., 12 על הפאות של תריסרון משוכלל. לאחר מכן, לכל שתי פאות סמוכות, סשה רשם על המקצוע המשותף שלהן את הפרש (החיובי) בין המספרים שעל שתי הפאות וסכם את כל המספרים שרשם. מהו הסכום המינימלי שיכול היה לצאת לסשה?

7. נתונים מספרים אי-שליליים a, b, c ו- c המקיימים $a + b + c = ab + ac + bc > 0$. הראו כי

$$\frac{\sqrt{ab} - 1}{\sqrt{ab} + 2c} + \frac{\sqrt{bc} - 1}{\sqrt{bc} + 2a} + \frac{\sqrt{ca} - 1}{\sqrt{ca} + 2b} \geq 0$$

בהצלחה!