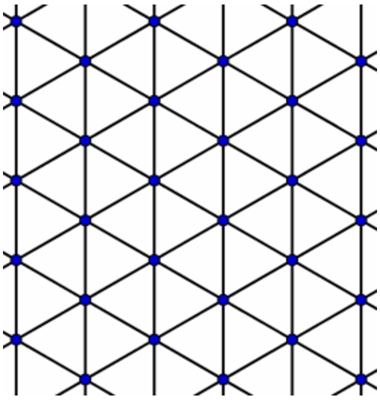
קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתונים מספרים שלמים $x,y,z\neq 0$ כך ש- $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ שלם. הוכיחו כי $\frac{xy}{z}$ שלם.



2. איילה גרה בארץ הקסומה איילון; הארץ מתפרסת על פני מישור אינסופי, ועליה נבנתה מערכת כבישים בצורה של רשת משולשית כמו בציור. איילה מחליטה לצאת לטיול נצחי, שמתחיל בצומת, וכל יום היא עוברת באמצעות כביש לצומת סמוך. איילה לא מוכנה בשום אופן לבקר באותו הצומת פעמיים. ברווז החליט להפריע לה, ולכן כל בוקר הוא חוסם שני כבישים היוצאים מהצומת שבו לנה איילה. לפעמים, הוא יכול לחסום אפילו שלושה כבישים היוצאים מהצומת של איילה, בתנאי שהוא לא עשה זאת ב-5783 הימים האחרונים.

האם ברווז יוכל למנוע מאיילה לטייל לנצח?

הערה: באיילון הלוטרות חיות לנצח.

3. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $\left(f\left(x\right)\right)^2-\left(f\left(y\right)\right)^2=\left(x-y\right)\cdot f\left(x+y\right)$.

4. נתון משושה קמור ABCDEF. הראו כיצד ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה נקודה P בתוך המשושה כך שהקטעים PA, PC, PE מחלקים את המשושה ל-3 מרובעים שווי שטח, בהנחה שהנקודה המבוקשת אכן קיימת.

בהצלחה!

13/6/2023 **מחנה קיץ** כ"ד בסיוון תשפ"ג

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. יהא ABC משולש החסום במעגל Ω ומרכז המעגל החסום בו הוא I. אמצע הקשת BAC יסומן N. הישר NI חותך את Ω שנית בנקודה T. נסמן את המעגל שעובר ב-B ומרכזו N ב-μ. הראו כי אורך המשיק מ-T ל-μ שווה באורכו ל-IT.

2. במישור נתון מצולע קמור בעל n צלעות עם קודקודים בנקודות שלמות. ידוע שעל כל צלע יש לפחות נקודה שלמה אחת (מלבד הקודקודים). בנוסף, על כל אלכסון אין נקודות שלמות (מלבד הקודקודים). מצאו את ה-n המקסימלי עבורו זה אפשרי.

3. יהא $P(x)$ פולינום עם מקדמים שלמים. נגיד שמספרים שלמים a ו-b **קשורים ישירות** אם $b=P(a)$ או $a=P(b)$. נגיד ששני מספרים שלמים u ו-v **קשורים** אם ניתן לרשום שורה של מספרים שלמים, בה הראשון הוא u והאחרון הוא v, כך שכל שני מספרים רצופים בשורה קשורים ישירות.

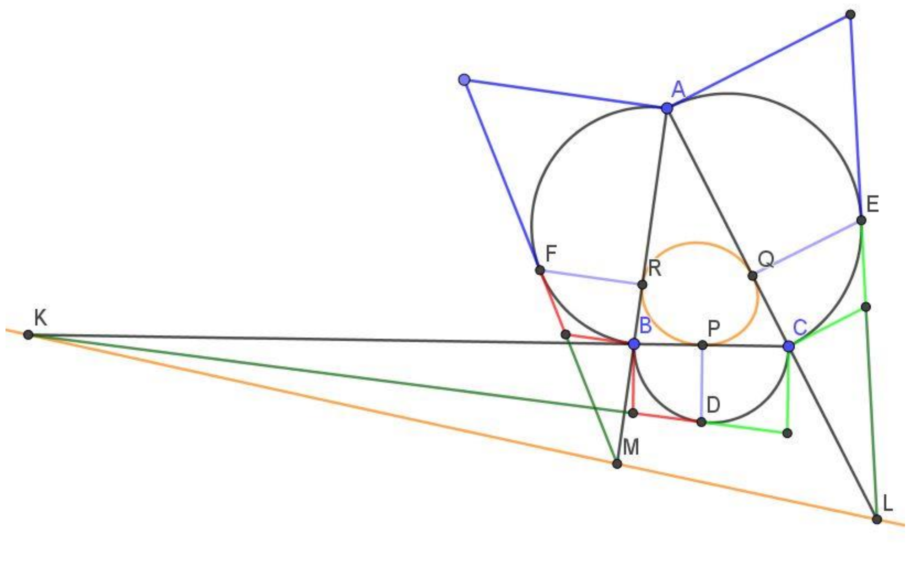
מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עבורם כל שני מספרים שלמים קשורים.

4. על צלעות המשולש ABC בנו כלפי חוץ חצאי מעגלים α, β ו-γ שהקטרים שלהם BC, AC ו-AB בהתאמה. נקודות D, E ו-F נמצאות על α, β ו-γ בהתאמה. המשיקים בנקודות A ו-E ל-β נפגשים בנקודה A_1, המשיקים בנקודות A ו-F ל-γ נפגשים ב-A_2, ונתון כי $AA_1=AA_2$. שני תנאים דומים מתקיימים גם בקודקודים B ו-C. עקבי האנכים מנקודות D, E ו-F לצלעות BC, AC ו-AB בהתאמה יסומנו P, Q ו-R.

א. הוכיחו שנקודות המפגש של BC עם המשיק ל-α ב-D, של CA עם המשיק ל-β ב-E, ושל AB עם המשיק ל-γ ב-F נמצאות על ישר אחד. ישר זה יסומן u.

ב. הראו שקיימת אליפסה שמשיקה לצלעות המשולש ABC בנקודות P,Q,R.

ג. הוכיחו שהציר הארוך של אליפסה מקביל לישר u.



5. יהיו a,b,c מספרים חיוביים. הראו כי

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\geq$$
$$\geq 2\left(\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}}+\sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}}\right)$$

6. על הלוח רשומים המספרים $1,2,3,...,100$. בכל מהלך ונגה יכולה לעשות אחת משתי פעולות:

- למחוק שני מספרים כלשהם ולרשום את מכפלתם.
- למחוק מספר שהוא ריבוע שלם ולרשום את השורש שלו.

האם יתכן שלאחר מספר מהלכים יישאר על הלוח מספר יחיד שהוא חסר ריבועים?

7. יש 125 סוכריות שוקולד בגודל $1\times1\times1$ שמסודרות בתוך קובייה $5\times5\times5$. לכל סוכריה מילוי ייחודי. חותכים את קוביית הסוכריות בעזרת סכין מישורית. מה המספר המירבי של מילויים שונים שיכולים להופיע בחתך המישורי שנוצר?

בהצלחה!

כ"ה בסיוון תשפ"ג **מחנה קיץ** 14/6/2023

קבוצת ירדן – מבחן בעל-פה

דף איילה

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו את המשוואה הבאה בשלמים חיוביים: $\left\lceil \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \cdot \frac{n}{10} \right\rceil = \left\lfloor \left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil \cdot \frac{n}{10} \right\rfloor$

2. נתונים שני מעוינים ABCD ו-ABEF. הנקודות C, D, E ו-F נמצאות באותו הצד של הישר AB. בסמוך למעוין ABCD בונים כלפי חוץ משולש משוכלל CDX. בסמוך למעוין ABEF בונים כלפי חוץ מעוין EFY. הראו כי הנקודות A, B, X ו-Y נמצאות על מעגל אחד.

3. תומר טוען שלכל גרף ניתן לרשום מספרים על הקודקודים, כך ששני קודקודים מחוברים בקשת אם ורק אם המספר הרשום באחד הקודקודים מתחלק במספר הרשום בקודקוד האחר. האם תומר צודק?

4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>1}$ עבורן מתקיים $f^{(a)}(b) \mid a+b$ לכל a,b שלמים חיוביים.

הערה: $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n}(x)\cdots))$.

בהצלחה!

קבוצת ירדן – מבחן בעל-פה

דף ברווז

אין להשתמש במחשבון

5. עבור שלמים חיוביים x ו-y, נסמן ב-$x\%y$ את השארית המתקבלת מחלוקה של x ב-y.
קבעו האם קיימות אינסוף שלשות (a,b,c) של מספרים שלמים זרים בזוגות, עבורן מתקיים
$a^b \% c = b^c \% a = c^a \% b$.

6. במרובע ABCD מתקיים $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90^\circ$. בתוך המרובע נבחרה נקודה E המקיימת $AB = AE$ וגם $DC = DE$. השיקוף של C ביחס לישר AD יסומן ב-F. אמצע BF יסומן ב-M. הראו כי ME מאונך ל-AD.

7. האם קיימות 9 נקודות (שונות) במרחב ושלושה מספרים ממשיים כך שכל 36 המרחקים ביניהן שווים לאחד מבין שלושת המספרים?

בהצלחה!

14/6/2023 **מחנה קיץ** כ"ה בסיוון תשפ"ג

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. על צלעות המשולש DEF סומנו 3 קטעים: קטע AX על הצלע EF, קטע BY על FD, וקטע CZ על DE, כך ש- $AX = BY = CZ$. האנכים האמצעיים של BC ו-YZ נפגשים בנקודה U, האנכים האמצעיים של CA ו-ZX נפגשים בנקודה V, והאנכים האמצעיים של AB ו-XY נפגשים בנקודה W. הראו כי הישרים DU, EV, ו-FW נפגשים בנקודה אחת.

2. יהא P פולינום ממעלה d. נניח ש- P מקבל ערכים שלמים בכל הנקודות השלמות וכן שלכל n שלם, $P(n)$ זוגי אם ורק אם $1024|n$. מצאו את ה- d המינימלי עבורו זה אפשרי, או הוכיחו שלא קיים כזה.

3. נתונה מחרוזת מעגלית המורכבת מכמות כלשהי של אבנים הנמצאות במרווחים שווים, כשכל אבן היא מאחד הסוגים: יהלום, אבן ספיר ואבן אודם. האם יתכן שמתקיימים ארבעת התנאים הבאים?

- קיים סיבוב (לא טריוויאלי) של המחרוזת שמעביר כל יהלום ליהלום.
- קיים סיבוב (לא טריוויאלי) של המחרוזת שמעביר כל אודם לאודם.
- קיים סיבוב (לא טריוויאלי) של המחרוזת שמעביר כל ספיר לספיר.
- **לא** קיים סיבוב (לא טריוויאלי) שמעביר כל אבן לאבן מאותו הסוג.

בהצלחה!