

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

$$1. \text{ חשבו את } \left[ 10 \cdot \frac{\frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \frac{1}{7^2-1} + \dots + \frac{1}{99^2-1}}{\frac{1}{4^2-4} + \frac{1}{6^2-4} + \frac{1}{8^2-4} + \dots + \frac{1}{100^2-4}} \right]$$

2. האם קיימים אינסוף מספרים טבעיים  $n$  כך ש- $2^n - 1$  מתחלק ב- $n^2 + 1$ ?

3. נתון מרובע קבוע ABCD. נקודה P היא נקודה משתנה על פנים הצלע AD. המעגלים החוסמים של ABP ו-CDP נפגשים בנקודות P ו-Q. הראו שכל הישרים האפשריים PQ עוברים בנקודה קבועה או שכולם מקבילים זה לזה.

4. נתון מצולע משוכלל בעל 20 קודקודים. איילה צובעת כל קודקוד שלו באחד משני צבעים. ברווז מעביר אלכסון שמחבר שני קודקודים נגדיים. לאחר מכן ברווז מעביר אנכים לאלכסון זה, כך שכל אחד מהאנכים אלה מכיל שני קודקודים בצבע זהה. על כל אחד מהאנכים הוא מקבל דג מאיילה. מהי כמות הדגים המקסימלית שברוויז יכול להבטיח לעצמו, ללא תלות ברצון הטוב של איילה?

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. נתון מצולע משוכלל בעל 20 קודקודים. איילה צובעת כל קודקוד שלו באחד משני צבעים. ברווז מעביר אלכסון שמחבר שני קודקודים נגדיים. לאחר מכן ברווז מעביר אנכים לאלכסון זה, כך שכל אחד מהאנכים אלה מכיל שני קודקודים בצבע זהה. על כל אחד מהאנכים הוא מקבל דג מאיילה. מהי כמות הדגים המקסימלית שברוויז יכול להבטיח לעצמו, ללא תלות ברצון הטוב של איילה?

2. יהי  $ABC$  משולש שווה שוקיים,  $AB = AC$  החסום במעגל  $\omega$ . התיכושקף מ- $B$  נחתך שנית עם  $\omega$  ב- $D$ . המעגל שעובר ב- $D, C$  ומשיק ל- $BC$  והמעגל שעובר ב- $A, D$  ומשיק ל- $CD$  נחתכים בנקודות  $D, X$ . מרכז המעגל החסום ב- $ABC$  יסומן ב- $I$ . הוכיחו כי  $B, C, I, X$  נמצאות על מעגל אחד.

3. בהינתן פולינום  $P(x)$  ו- $k$  שלם חיובי, נסמן ב- $P^{\circ(k)}(x)$  את ההרכבה של הפולינום עם עצמו  $k$  פעמים. פולינום  $P(x)$  עם מקדמים ממשיים יקרא מושלם, אם לכל  $n$  שלם קיים  $k$  שלם חיובי כך ש- $P^{\circ(k)}(n)$  שלם. האם לכל פולינום מושלם  $P(x)$  קיים  $m$  שלם חיובי עבורו לכל  $n$  שלם קיים  $k \leq m$  כך ש- $P^{\circ(k)}(n)$  שלם?

**בהצלחה!**

## תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. האם קיימת תמורה  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  של המספרים  $(1, 2, 3, \dots, n)$  כך שלכל  $1 < k < n$  הסכום  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  לא מתחלק ב- $k$ ? התשובה יכולה להיות תלויה ב- $n$ .

$$2. \text{ לכל } n \geq 0 \text{ נסמן ב- } x_n \text{ את הסכום } x_n = \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} \cdot 3^{n-i}$$

הראו כי  $x_{2n} = x_n^2 + 3x_{n-1}^2$  לכל  $n \geq 1$ .

3. מצולע משוכלל  $A_1 A_2 \dots A_{2n} B_{2n} B_{2n-1} \dots B_2 B_1$  בעל  $4n$  צלעות מחולק לטרפזים באמצעות האלכסונים  $A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_{2n-1} B_{2n-1}$ . זכרה צובעת את הטרפזים בכתום וירוק לסירוגין. נוצרו  $n$  טרפזים כתומים ו- $n-1$  טרפזים ירוקים, כך שכל שני טרפזים סמוכים שונים בצבעם. איזה שטח גדול יותר, הירוק או הכתום?

4. מספרים ממשיים  $a, b, c$  מקיימים  $a + b + c = 3$ . הראו כי

$$4(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) + 9a^2 b^2 c^2 \geq 21abc$$

5. קובייה  $5 \times 5 \times 5$  חולקה ל-125 משבצות  $1 \times 1 \times 1$ , כאשר כל משבצת נמצאת במצב דלוק או כבוי. משבצות נחשבות סמוכות עם יש להם פאה משותפת. בהתחלה כל משבצת במצב כבוי. בשלב ראשון איילה מדליקת  $M$  משבצות לפי בחירתה. לאחר מכן ברווז יכול מספר פעמים להדליק משבצת כבוייה שיש לה פאה משותפת עם לפחות 5 משבצות דלוקות. הוא עושה פעולות כאלה כל עוד הוא יכול. עבור איזה  $M$  קטן ביותר יתכן שכל המשבצות בסוף תהיינה דלוקות?

6. מצאו את רדיוסו של חצי העיגול הגדול ביותר שניתן להכניס לתוך המשולש שאורכי צלעותיו הן  $a, b$  ו- $c$ .

7. מצאו את כל הפונקציות מ- $\mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  עבורן מתקיים  $f(x) + f(y) + f(z) \mid x^2 + y^2 + z^2$  לכל  $x, y, z$  שלמים חיוביים.

**בהצלחה!**