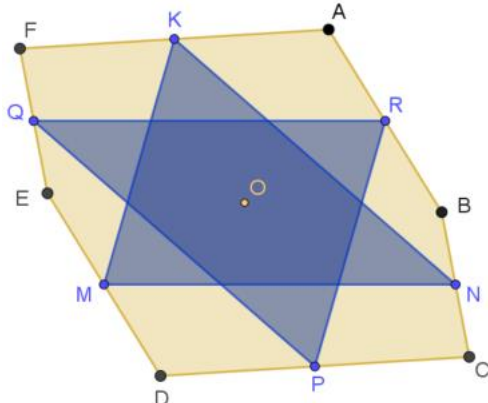


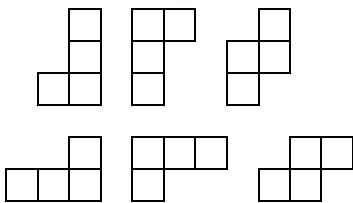
קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו את המשוואה הבאה במספרים שלמים חיוביים: $1 + x + x^3 + x^4 = 3^y$.



2. במשולש M, N, K נקודת מפגש התיכונים היא O . הנקודות P, Q, R הן שיקוף של M, N, K ביחס ל- O . משושה קמור $ABCDEF$ נבחר כך שאמצעי צלעותיו הם M, N, K, P, Q, R כפי שמופיע בציור. מצאו את $\frac{S_{ABCDEF}}{S_{MNK}}$.



3. טוף רוצה לרצף לוח מלבני $m \times n$ באמצעות 6 סוגים של מרצפות שמוצגות בציור (מותר להזיז, אסור לסובב או לשקף). עבור אילו זוגות מספרים m, n זה מתאפשר?

4. לכל מספר שלם חיובי n , נסמן ב- $A(n)$ את סכום המחלקים שלו, וב- $B(n)$ את סכום המכפלות של זוגות מחלקים שונים שלו. לדוגמא:

$$A(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

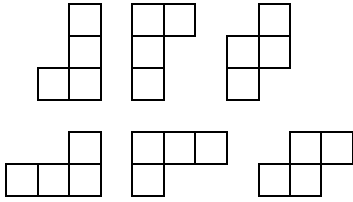
$$B(10) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 97$$

הראו כי $A(n^2)$ מחלק את $B(n^2)$.

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון



1. טוף רוצה לרצף לוח מלבני $m \times n$ באמצעות 6 סוגים של מרצפות שמוצגות בציור (מותר להזיז, אסור לסובב או לשקף). עבור אילו זוגות מספרים m, n זה מתאפשר?

2. לכל מספר שלם חיובי n , נסמן ב- $A(n)$ את סכום המחלקים שלו, וב- $B(n)$ את סכום המכפלות של זוגות מחלקים שונים שלו. לדוגמא:

$$A(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

$$B(10) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 97$$

מצאו כל המספרים השלמים החיוביים n שעבורם $A(n)$ מחלק את $B(n)$.

3. יהי ABC משולש. על צלעותיו בונים טרפזים שווי שוקיים ודומים (לפי סדר הופעת הנקודות) כלפי חוץ: $ABXY, BCZW, CAUV$, כך שצלעות המשולש הן בסיסים בטרפזים המתאימים. המעגלים החוסמים של המשולשים XZU, YWV נחתכים בשתי נקודות שונות: P ו- Q . הוכיחו שהישר PQ עובר בנקודה שלא תלויה בבחירת הטרפזים.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. המשולש ABC חסום במעגל Ω . נסמן ב- S_A, S_B, S_C את אמצעי הקשתות BC, CA, AB בהתאמה. מה גדול יותר: $AS_A + BS_B + CS_C$ או היקף המשולש ABC?

2. מעגל שאורכו $2n$ חולק לקשתות באורך 1 על ידי נקודות שחורות. במהלך המשחק איילה וברווז צובעים בתורות את הנקודות השחורות (איילה צובעת באדום כמובן, וברווז בכתום, איילה מתחילה). המטרה של ברווז היא שבסוף המשחק עבור כל $1 \leq k \leq n$ תהיה קשת באורך k עם קצה אדום וקצה כתום. עבור אילו ערכי n יש לברווז אסטרטגיה מנצחת?

3. מספר נקרא קסום אם הוא 9-ספרתי וכולל את כל הספרות 1, 2, 3, ..., 9. מצאו את כמות המספרים הקסומים המתחלקים ב-1111.

4. במשולש משוכלל עם אורך צלע $2(1 + \sqrt{3})$, נמצאים שלושה עיגולים שלא חותכים זה את זה

$$\text{ורדיוסיהם } r_1, r_2, r_3. \text{ הראו כי } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \geq 3.$$

5. מצאו את כמות השלשות של מספרים שלמים $0 \leq x, y, z < 499$ עבורן מתקיים

$$x^5 + y^5 + z^5 \equiv \left(\frac{x+y}{2}\right)^5 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^5 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^5 \equiv (x+y+z)^5 \pmod{499}$$

6. נתון מרובע חסום שאורכי הצלעות שלו הם a, b, c, d ואורכי אלכסונו הם e, f . הוכיחו כי

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geq 4 \left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} \right)$$

7. נתון משולש ABC. לכל נקודה P בתוך המשולש, נגדיר נקודה P_A שהיא נקודת חיתוך הישרים PA ו-BC, ונקודה Q_A כך שהאמצע של PQ_A הוא P_A ; באופן דומה נגדיר גם את הנקודות Q_B ו- Q_C . הצלעות של ABC נחתכות עם הצלעות של $Q_A Q_B Q_C$ ב-6 נקודות. לאילו בחירות של נקודה P, ששת הנקודות נמצאות על מעגל אחד?

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. הקטעים BE ו-CF הם גבהים במשולש ABC (כאשר E ו-F נמצאות על AC ו-AB בהתאמה). מעגל γ משיק לישר BC בנקודה C ועובר דרך הנקודה E. מעגל β משיק לישר BC בנקודה B ועובר דרך הנקודה F. הראו שהמשיקים למעגלים β ו- γ בנקודות E ו-F בהתאמה נפגשים על הישר BC.

2. מצאו את כל המספרים הטבעיים n עבורם $\varphi(n^2 + 1) = n$.

3. נזכיר כי סדרת פיבונצ'י מוגדרת באמצעות $f_1 = f_2 = 1$ וכלל הנסיגה $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. מצאו את

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n+1}^2}{f_n f_{n+2} f_{n+3}}$$

הסכום האינסופי.

4. על הלוח רשומים המספרים 2000, 2018, 2022 בכל מהלך ניתן לבחור מספר שרשום על הלוח ולהחליף אותו בהפרש בין סכום שני המספרים האחרים למספר שנבחר. כאשר על הלוח הופיע המספר 5782 בפעם הראשונה התהליך נעצר, ברגע זה על הלוח היו רשומים המספרים $a < b < c$. מה הוא הערך הגדול ביותר האפשרי של b ?

בהצלחה!