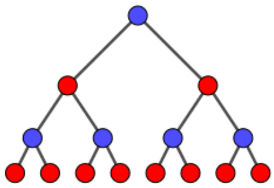
2/11/2022 **מחנה סתיו** ח' בחשוון תשפ"ג

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתון משולש ABC חד זוויות ונקודה X בפנים הקטע BC. המעגל ω עובר בנקודות A ו-X ומשיק ל-BC. המעגל ω חותך שנית את הצלעות AB, AC בנקודות D, E בהתאמה. מצאו את כל הנקודות X עבורן $BCDE$ חסום במעגל.

2. מצאו את כל השלשות a,b,c של שלמים חיוביים שמקיימים $a^8+16^b=16c^8+a^4\cdot 2^{2b+1}$.



3. נתון עץ בינארי בעומק 8 (בציור נתון עץ בינארי בעומק 3 להמחשה), שהשכבות שלו צבועות באדום וכחול לסירוגין - השורש צבוע בכחול, הבנים שלו צבועים באדום, הבנים שלהם בכחול, וכן הלאה עד העלים שצבועים בכחול. בכל צומת בעץ כתוב מספר שלם כך שמתקיימים התנאים הבאים:

- בעלים כתובים המספרים מ-1 עד 256 כך שכל מספר מופיע בעלה אחד בדיוק.
- בכל צומת כחול (מלבד העלים) כתוב המספר הגדול יותר מבין שני הבנים שלו.
- בכל צומת אדום כתוב המספר הקטן יותר מבין שני הבנים שלו.

מצאו את כל האפשרויות עבור המספר הכתוב בשורש.

4. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\cdot f(y)+y\right)=y\cdot f(x)+f(y)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.

בהצלחה!

2/11/2022 **מחנה סתיו** ח' בחשוון תשפ"ג

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. עבור n שלם חיובי, נסמן ב-$f_2(n)$ את כמות המחלקים של n שהם ריבוע שלם וב-$f_3(n)$ את כמות המחלקים של n שהם קובייה שלמה. הוכיחו כי לכל $k \geq 1$ שלם קיים שלם חיובי n כך ש-$\frac{f_2(n)}{f_3(n)} = k$.

2. בלוח משבצות 8×8, כל משבצת נבצעה בשחור או לבן כך שאין ריבוע 2×2 שכל המשבצות שלו באותו הצבע. סדרת משבצות שונות $x_1, \dots, x_m$ תקרא **נחש באורך m** אם לכל $1 \leq i < m$ המשבצות x_i, x_{i+1} שכנות לפי צלע וצבועות בצבעים שונים. מה הוא ה-m הגדול ביותר כך שניתן להבטיח שקיים נחש באורך m על הלוח?

3. במשולש ABC נקודת מפגש הגבהים היא H ועקב הגובה מ-A הוא D. נקודה P מקיימת $AP = HP$ והישר PA משיק למעגל החוסם של ABC. הישר PD נחתך עם AB, AC בנקודות X, Y בהתאמה. הוכיחו כי $\angle YHX = \angle BAC$ או $\angle YHX + \angle BAC = 180°$.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית – עמוד 1

אין להשתמש במחשבון

1. כמה פונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ קיימות עבורן $f\left(f\left(f(n)\right)\right)=n+6$ ו־$f(n)\geq n$?

2. בארץ חוֹרְפָּנַרְנִיָּה נערכו בחירות לנשיאות. בבחירות ישנם 11 מועמדים לנשיאות, וכל 10,000,000 תושבי חורפנרניה משתתפים בהצבעה. כל תושב ממלא בפתק ההצבעה את סדר ההעדפות שלו מבין המועמדים (כלומר – מי המועמד המועדף עליו ביותר, מי הבחירה השנייה שלו, וכך הלאה עד המועמד הגרוע ביותר לדעתו). לאחר ההצבעה בודקים את התוצאות בסבבים. בסבב הראשון, סופרים לכל מועמד כמה תושבים דירגו אותו במקום הראשון. אם אחד המועמדים קיבל יותר קולות מכל מועמד אחר, הוא מוכרז כנשיא והתהליך נעצר. אחרת, כלומר אם כמה מועמדים מובילים בתיקו, עוברים לסבב השני, בו סופרים לכל מועמד (כולל עבור אלו שלא היו חלק מהתיקו בסבב הראשון) כמה פעמים הוא דורג באחד משני המקומות הראשונים. שוב, אם יש מועמד יחיד שקיבל כמות מקסימלית של קולות, הוא נבחר לנשיא, ואחרת ממשיכים לסבב השלישי בו סופרים לכל מועמד את כמות הפעמים שדורג באחד משלושת המקומות הראשונים, וכן הלאה.

האם ייתכן שנבחר נשיא רק בסבב העשירי, ושהנשיא שנבחר לא היה מבין המועמדים המובילים בתיקו באף אחד מתשעת הסבבים הראשונים?

3. יהי ABC משולש חד-זוויות. יהיו B_1, C_1 השיקופים של B, C סביב AC, AB בהתאמה. הישרים BC_1, CB_1 נפגשים ב־P. הוכיחו כי AR מאונך ל־BC, כאשר R מרכז המעגל החוסם של B_1C_1P.

4. מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עם מקדמים שלמים אי־שליליים עבורם לכל $n\geq 2022$ מתקיים ש־

$$1^{p(1)}+2^{p(2)}+3^{p(4)}+4^{p(8)}+\ldots+n^{p(2^{n-1})}$$

הוא ריבוע שלם.

<u>המשך בצד השני!</u>

תחרות קבוצתית – עמוד 2

אין להשתמש במחשבון

5. נתון שק גדול ובתוכו $n \geq 4$ גרביים ב־n צבעים שונים וידועים מראש, גרב אחד מכל צבע. שתי חכמות ניגשות למבחן: כל חכמה בתורה מוציאה זוג גרביים מהשק בעיניים עצומות, וגורבת אותם על אוזניה (גרב אחד על כל אוזן), בלי לראות את הגרביים שבשק או את אלה ששלפה. בהישמע צלצול הגונג הראשון, הן פוקחות את העיניים וכל חכמה רואה את צבעי הגרביים שעל אוזני החכמה האחרת. בהישמע צלצול הגונג השני, כל חכמה מכריזה על צבע אחד, וההכרזה נעשית בו־זמנית. החכמות מצליחות במבחן אם לפחות אחת מהן גורבת גרב בצבע שהכריזה. מה ה־n הגדול ביותר עבורו החכמות יכולות לתאם מראש אסטרטגיה שתבטיח הצלחה במבחן?

6. הוכיחו כי לכל שלושה מספרים ממשיים $a, b, c > 0$ מתקיים

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq 2.$$

7. יהי ABC משולש ונקודה D (נגיד בתוכו). נסמן ב־D_A, D_B, D_C את עקבי הצ׳ביאנות מ־A,B,C בהתאמה. נסמן ב־A_B את אמצע הקטע AD_B, ובדומה לכל זוג קודקודים. נסמן ב־X_A את נקודת החיתוך של B_AB_C עם C_AC_B, ובדומה נסמן את X_B ו־X_C. מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות D עבורן AX_A, BX_B ו־CX_C נפגשים בנקודה אחת.

8. האם קיימות אינסוף שלשות של מספרים שלמים שונים $a,b,c \geq 2$, עבורן לכל 6 הבחירות של $x, y \in \{a,b,c\}$ בהן $x \neq y$ מתקיים ש־$x^4 - 1$ מתחלק ב־y?

בהצלחה!