

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. איילה, ברווז, גמל, דורבן והיפו קיבלו צורות מישוריות חופפת. כל אחד מהם חילק את הצורה לשני מצולעים (לא בהכרח קמורים). לאחר מכן כל אחד מהם מסר את אחד המצולעים שהתקבלו לוומבט, ואת השני לזברה. וומבט קיבל חמישה מצולעים חופפים. האם יתכן שזברה קיבלה משולש, מרובע, מחומש, משושה ומשובע?

2. נתונים שלושה מספרים שלמים  $a, b, c$  המקיימים  $a + b + c = 17$ . בנוסף נתון כי המספר  $N = a^3b + b^3c + c^3a - a^3c - c^3b - b^3a$  הוא חיובי. מצאו את הערך המינימלי האפשרי של  $N$ .

3. לשחר היה משולש  $ABC$ . חוצה הזווית מ- $B$  פוגש את הישר  $AC$  בנקודה  $K$  ואת המעגל החוסם של  $ABC$  בנקודה נוספת  $L$ . שחר איבד את המשולש, אבל הספיק לצייר על דף נפרד קטעים באורך  $BK, BL$  וגם באורך הרדיוס של המעגל החוסם. כיצד לבנות משולש שחופף למשולש המקורי של שחר באמצעות סרגל ומחוגה?

4. בתחילת התהליך רשום על הלוח מספר שלם חיובי  $a$ . בתור ה- $i$  (החל מ-1) אם  $\gcd(a, i) = 1$  מקטינים את המספר על הלוח ב-1 ואחרת מגדילים אותו ב-1. אם בשלב כלשהו כותבים על הלוח את המספר 0 אז התהליך מסתיים. עבור אילו ערכי  $a$  התהליך יהיה אינסופי?

**בהצלחה!**

## תחרות קבוצתית

1. במישור נתונות 5 נקודות שחורות שהן קודקודי מחומש משוכלל. לאחר מכן מסמנים בכחול כל נקודה שהיא אמצע קטע שמחבר שתי נקודות שחורות. לבסוף מסמנים באדום כל נקודה שהיא אמצע קטע שמחבר שתי נקודות כחולות. כמה נקודות אדומות תהיינה בציור?

2. נתונה פירמידה עם בסיס מלבני ABCD, וקודקוד ראש V (המרחקים מ-V לקודקודי המלבן לאו דווקא שווים). בפירמידה חסום כדור שמרכזו I; מישור שמשיק לכדור ומקביל לבסיס המלבני חותך את המקצועות VA, VB, VC, VD בנקודות פנימיות A', B', C', D' בהתאמה. הראו כי 5 הישרים A'C, B'D, C'A, D'B והאנך מ-I לבסיס של הפירמידה נפגשים בנקודה אחת.

3. בשורה רשומים N מספרים טבעיים עם רווחים ביניהם. שלומי רוצה להכניס סימן של כפל או חיבור בכל רווח, כך שהתוצאה תתחלק ב-17. האם הוא יכול לעשות זאת בכל מצב בהנחה ש-

$$N = 257, \quad \text{א.} \quad N = 50, \quad \text{ב.} \quad ?$$

4. צלעות המשולשים XYZ ו-UVW נפגשים ב-6 נקודות: UV חותך את ZX ואת XY בנקודות A ו-B בהתאמה, VW חותך את XY ואת YZ בנקודות C ו-D בהתאמה, WU חותך את YZ ואת ZX בנקודות E ו-F בהתאמה. נתון כי AD, BE ו-CF נפגשים בנקודה אחת. אמצעי הקטעים BD, DF ו-FB הם K, N ו-M בהתאמה. אמצעי הקטעים VY, WZ ו-UX הם R, T ו-L בהתאמה. הראו כי הישרים LM ו-TN, RK נפגשים בנקודה.

5. תחנת החלל מורכבת ממסדרונות, שהן מקצועות של פאון משוכלל. פושע ושני שוטרים מסוגלים לנוע לאורך המסדרונות, המהירויות שלהם שוות, וכולם רואים זה את זה בכל רגע. הפושע מתחיל באחד מקודקודי הפאון, שבו יש גם משגר ניח, והשוטרים מתחילים בשני קודקודים שונים אשר סמוכים למשגר. לפושע יש גם משגר נייד, ובכל רגע נתון הוא יכול להשתמש בו כדי לשגר את עצמו באופן מידי למשגר הניח. האם השוטרים יכולים לתפוס את הפושע, כאשר

א. תחנת החלל היא בצורת מקצועות קובייה?  
ב. תחנת החלל היא בצורת מקצועות ארבעון משוכלל?

6. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  כך שלכל  $x, y \in \mathbb{Z}$  מתקיים

$$f(f(x) + f(xy)) + f(x + y) = xy + f(x + f(x + y))$$

7. עבור איזה N גדול ביותר יכולה להיות:

א. קבוצה של N לוטרות, שהשתתפו במספר פגישות שבועיות, כך שבכל פגישה נכחו בדיוק 4 לוטרות, לא היו 3 לוטרות שנכחו שלושתן יחד בשתי פגישות שונות, ושמתוך כל חמישייה של לוטרות יש רביעייה שנכחו באותה פגישה?

ב. קבוצה של N נקודות שונות מסומנות במישור שאף 5 מהן לא על מעגל אחד, ומתוך כל חמישייה של נקודות מסומנות, ארבע מהן נמצאות על מעגל אחד?

**בהצלחה!**

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. נתון לוח  $8 \times 8$ . בהתחלה כל משבצות הלוח לבנות. בכל מהלך צביה צובעת בכחול שלוש משבצות לבנות שיוצרות פינה, כמו בציור (מותר לה לבחור את כיוון הפינה מחדש בכל מהלך). היא מפסיקה לבצע מהלכים כאשר אין לה מהלך חוקי. מטרתה היא לבצע מספר מינימלי של מהלכים. כמה מהלכים היא תצטרך לעשות? ניקוד חלקי יינתן על חסמים משני הצדדים.

2. א. האם קיימת פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $x, y \in \mathbb{R}$  מתקיים אי-השוויון

$$? f(x + f(y)) < x \cdot f(y)$$

ב. האם קיימת פונקציה  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $x, y \in \mathbb{R}$  מתקיים אי-השוויון

$$? f(x + f(y)) > x \cdot f(y)$$

3. במשולש  $ABC$  הקטעים  $AH_1, BH_2, CH_3$  הם הגבהים, והקטעים  $AM_1, BM_2$  הם תיכונים (כאשר הנקודות  $H_i, M_i$  נמצאות על הצלעות). הגובה  $BH_2$  והתיכון  $AM_1$  נפגשים בנקודה  $P_1$ . הגובה  $AH_1$  והתיכון  $BM_2$  נפגשים בנקודה  $P_2$ . הראו כי נקודת המפגש של  $P_1M_2$  ו- $P_2M_1$  נמצאת על הגובה  $CH_3$ .

4. נזכיר שמספר טבעי נקרא מושלם, אם הוא שווה לסכום כל המחלקים שלו שקטנים ממנו (לדוגמה 6 או 28). האם קיים פולינום לא קבוע בעל מקדמים שלמים, כך שלכל  $n$  טבעי המספר  $p(n)$  הוא חיובי ומושלם?

**בהצלחה!**