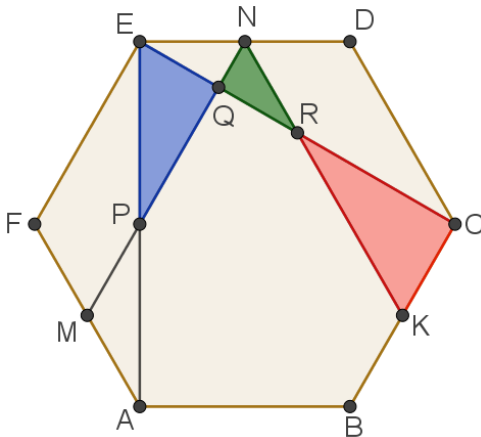


קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. במשושה משוכלל $ABCDEF$, אמצעי הצלעות DE , AF , BC ו- M , N ו- K בהתאמה. הישר MN חותך את הישרים AE ו- CE בנקודות P ו- Q בהתאמה. הישר NK חותך את הישר CE בנקודה R . מה יותר גדול: שטח המשולש RCK או סכום שטחי המשולשים PEQ ו- NRQ ?

2. המספר $5782^4 - 5782^3 + 5782^2 - 5782 + 1$ מתחלק במספר טבעי d . מצאו את כל האפשרויות לשארית החלוקה של 2^d ב-31.

3. בכיתה יש 30 תלמידים. לכבוד ט"ו בשבט כל תלמיד בחר כמה פירות יבשים מתוך n סוגים. נגיד ששני תלמידים הם חברים אם הם בחרו פרי מאותו הסוג. מצאו את ה- n המינימלי כך שיתכן שלכל תלמיד יש בדיוק 3 חברים.

4. המספרים a, b, c ממשיים. הוכיחו כי

$$(a^5 + b^5 + c^5 + a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2)(a^5b^3 + b^5c^3 + c^5a^3)$$

בהצלחה!

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. נתון משולש ABC, נקודת מפגש הגבהים היא H. נקודה P נעה על הישר BC. האנך דרך P לישר BC פוגש את הישרים BH ו-CH בנקודות X ו-Y בהתאמה. הישר דרך H שמקביל ל-BC פוגש את AP בנקודה Q. הישרים QX ו-QY פוגשים את הישר BC בנקודות U ו-V בהתאמה. מצאו את הצורה של המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים החסומים במשולשים QUV.

2. המספרים a, b, c ממשיים. הוכיחו כי

$$(a^5 + b^5 + c^5 + a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2)(a^5b^3 + b^5c^3 + c^5a^3)$$

3. בכיתה יש 30 תלמידים. לכבוד ט"ו בשבט כל תלמיד בחר כמה פירות יבשים מתוך n סוגים. נגיד ששני תלמידים הם חברים אם הם בחרו פרי מאותו הסוג. מצאו את ה- n המינימלי כך שיתכן שלכל תלמיד יש בדיוק 6 חברים.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון, *gebra* וכל דבר שעושה עבורכם את החישוב.

אפשר לצייר את התמונות באמצעות *annotate* של *Zoom*.

1. האם אפשר לחתוך ריבוע 13×13 ל-4 חלקים קשירים, ולכסות באמצעות חלק מהם ריבוע 12×12 ובאמצעות החלקים שנשארו ריבוע 5×5 .

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$f(x^2 + y^2 - 1) + f(x + y - 1) = x \cdot f(x) + y \cdot f(y)$$

3. נתון משולש ABC שחסום במעגל ω . בוחרים מיתר PQ של ω שמקביל ל-BC. מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ACQ, ABP יסומנו I_1 ו- I_2 בהתאמה. המעגל החוסם של משולש AI_1I_2 והמעגל ω נחתכים בנקודות A ו-D. הראו ש-D תלויה רק במשולש הנתון ABC ולא בבחירה של המיתר PQ.

4. נתון לוח משבצות 2021×2021 . לקלרה אוסוולד יש מאגר לא מוגבל של שני סוגי מרצפות. הסוג הראשון הוא ריבוע 2×2 על 2, והסוג השני הוא "ר" שמורכבת מחמש משבצות כבציור (וניתן לסובב ולשקף אותה). קלרה יכולה לשים מרצפות על הלוח בתנאי שהן לא נחתכות והשפה של כל מרצפת היא חלק מקווי המשבצת של הלוח. מטרתה של קלרה היא לרצף את הלוח כך שמספר המשבצות מהלוח שלא יכוסו יהיה קטן ככל האפשר. מהו המספר המינימלי האפשרי של משבצות שלא יכוסו?

5. מספר חיובי x נקרא קריב אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים p, q טבעיים כך ש- $\left| \frac{p}{q} - x \right| < \frac{\varepsilon}{q^2}$.

האם סכום של שני מספרים קריבים חייב להיות קריב?

6. המספרים a, b, c אי-שליליים. הוכיחו כי $\frac{1+bc}{(1+a)^2} + \frac{1+ca}{(1+b)^2} + \frac{1+ab}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{2}$.

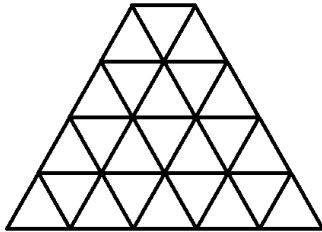
7. לכל מספר טבעי n נגדיר את $f(n)$ להיות n ועוד סכום הספרות של n ברישום עשרוני. סדרה של מספרים טבעיים $\{a_1, a_2, \dots\}$ מקיימת את כלל הנסיגה $a_{k+1} = f(a_k)$. האם בהכרח יש בסדרה זו מספר זוגי?

8. במשולש ABC מרכז המעגל החוסם הוא O, והנקודה הנגדית ל-A על המעגל החוסם היא A'. נקודה O' סימטרית ל-O ביחס לישר BC. המעגל החוסם של A'O'O פוגש את המעגל החוסם של ABC בשתי נקודות: A' ו-Q. מרכזי המעגלים החוסמים של AOC ושל AOB הם E ו-F בהתאמה. נסמן ב-M ו-N את האמצעים של BE ו-CF בהתאמה. הראו כי MN מאונך ל-O'Q.

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון



1. כל צלע של משולש משוכלל חולקה על ידי נקודות ל-5 חלקים שווים. דרך נקודות החלוקה הועברו ישרים שמקבילים לצלעות המשולש. ישרים אלו חילקו את המשולש ל-25 משבצות משולשיות. כאשר מורידים את אחת המשבצות הפינתיות, נשארת צורה עם 24 משבצות. האם ניתן לחלק את הצורה הזאת לפי קווי המשבצות ל-3 צורות חופפות וקשירות?

הבהרה: צורה קשירה זו צורה שבה אפשר להגיע מכל משבצת לכל משבצת אחרת באמצעות מספר מעברים בין משבצות בעלות צלע משותפת.

2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$x \cdot f(x) + f(xy) - y = x \cdot f(x + y) - f(f(y))$$

3. נתון פולינום עם מקדמים שלמים $p(x)$, וסדרה אינסופית של מספרים שלמים $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ שמקיימת $a_{k+1} = p(a_k)$ לכל $k \geq 0$. נניח כי $a_{5782} = a_0$. מהו המספר הגדול ביותר האפשרי של מספרים שונים שמופיעים בסדרה?

4. נתון מרובע ABCD שחסום במעגל, שבו $AB = BC$. הישר ℓ הוא אחד המשיקים המשותפים של המעגלים החסומים במשולשים BAD ו-BCD, והוא חותך את הקטעים AD ו-CD ולא בקצוותיהם. הראו כי ℓ מקביל לישר AC.

בהצלחה!