

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

1. נתונים $a, b, c \geq 0$ ממשיים המקיים ש- $a + bc = 2$ הוכיחו ש-

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1 + \frac{1}{6}(a-1)^2$$

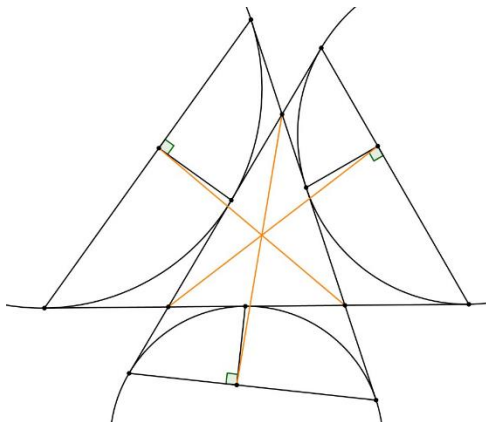
2. במשולש ABC הגבהים נפגשים בנקודה H, כאשר D הוא עקב הגובה מ-A. האמצע של BC יסומן M. המעגל שקוטרו AH יסומן μ . המעגל ω עובר בנקודות D ו-M, ומשיק מבפנים ל- μ . המעגל שקוטרו BC חותך את ω בנקודות P ו-Q. הראו כי הישר PQ משיק ל- μ .

3. רוצים לצייר על לוח לבן מספר מעגלים, וסביב כל מעגל לרשום ספרות (בין 0 ל-9) כך שסה"כ על הלוח תהיינה רשומות 100 ספרות, ויהיה אפשר למצוא כל רצף של שתי ספרות סמוכות (נגיד 17 או 11 או 71) כאשר קוראים את אחד המעגלים עם כיוון השעון. בכמה שיטות שונות קומבינטורית ניתן ליצור מעגלים כאלו?

הערות: אין חשיבות לסדר המעגלים בתוך האוסף, ושני מעגלים שנבדלים על ידי סיבוב נחשבים זהים. מותר לכתוב אותה ספרה כמה פעמים באותו מעגל. כל מעגל מכיל לפחות שתי ספרות.

4. נסמן ב- $\mathbb{Z}_{>0}$ את קבוצת כל המספרים השלמים החיוביים. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ מתקיים $2f(x+y) = f(4x) + f(3y)$.

5. הנקודות (x, y, z) במרחב תלת-ממדי שכל הקואורדינטות שלהן הן מספרים שלמים מ-1 עד n נצבעו בשני צבעים: אדום וכחול. עבור אילו ערכים של n ניתן להבטיח קיום של משולש משוכלל שכל הקודקודים שלו נצבעו באותו הצבע?



6. במשולש ABC המעגל החסום מבחוץ לצלע BC משיק לצלע זו בנקודה A_1 ולהמשכי הצלעות האחרות בנקודות A_2 ו- A_3 . עקב האנך מ- A_1 לישר A_2A_3 יקרא A' . באופן סימטרי נגדיר נקודות B' ו- C' .
א. הראו כי הישרים AA' , BB' ו- CC' נפגשים בנקודה אחת.
ב. הראו כי הישרים $A'B'$ ו- AB מקבילים.

7. מצאו את כל השלמים החיוביים m, n, k כך שמתקיים

$$m^m + k^k = n!$$

בהצלחה!

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. עבור איזה n חיובי שלם קטן ביותר, ערך הביטוי

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{20 + 2 \cdot \sqrt{99}} + 2 \cdot \sqrt[4]{99}} + 2 \cdot \sqrt[8]{99}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{20 + 2 \cdot \sqrt{99}} + 2 \cdot \sqrt[4]{99}} - 2 \cdot \sqrt[8]{99}} \right)^n$$

יהיה מספר שלם?

2. נתון כי המספר $2^{236} \cdot 3^{177} \cdot 5^{118} \cdot 7^{59}$ הוא מכפלת כל המחלקים החיוביים של המספר N שקטנים ממנו. חשבו את N .

3. בארבעון שלושת המקצועות מאחד הקודקודים מאונכים זה לזה ואורך כל אחד מהם הוא 6. בארבעון זה חסום כדור K . רוצים לייצר קופסה קובייתית שבה יהיה אפשר להכניס ללא חיתוך שני כדורים באותו גודל כמו K . מהו אורך המקצוע הקטן ביותר האפשרי של קופסה שכזו?

4. נתון לוח משבצות 7×7 . איילה בוחרת משבצת אחת, שתיקרא משבצת עצובה. לאחר מכן, איילה מחלקת את כל המשבצות (חוץ מהמשבצת העצובה) לרביעיות, כך שבכל רביעייה מרכזי המשבצות הם 4 קודקודים של ריבוע (הצלעות של הריבועים לאו דווקא מקבילות לגבולות הלוח). מצאו את כל האפשרויות למשבצת העצובה.

בהצלחה!