

## קבוצת דן

אין להשתמש במחשבון

1. צלעותיו של מחומש קמור הם: 3, 4, 6, 7, 5 בסדר זה. האם יתכן כי המחומש חוסם מעגל?
2. מספרים שלמים חיוביים  $a, b$  ומספר ראשוני  $p$  מקיימים:  $a(a+p) = b^2$ . הראו כי  $a$  הוא ריבוע שלם.
3. האם  $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$  רציונלי?
4. סימה וזיו משחקים משחק: סימה מסמנת  $N$  נקודות שונות  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , לאחר מכן זיו מנסה למצוא זווית  $A_i A_j A_k$  שקטנה מ-10 מעלות. עבור אילו ערכי  $N$  זיו בהכרח יצליח לסמן זווית כזאת?
5. דני מקבל  $N$  מספרים טבעיים שונים. מטרתו לבחור 9 מהם ולסדר אותם בתוך ריבוע  $3 \times 3$  כך שהפרש של כל שני מספרים באותה שורה יתחלק ב-2, ובכל עמודה המספרים יהיו מסודרים בסדר עולה מלמטה למעלה.  
עבור אילו ערכי  $N$  הוא יוכל בהכרח להשיג את מטרתו?  
(חסמים ותוצאות חלקיות יזכו בניקוד חלקי).

**בהצלחה!**

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. האם  $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$  רציונלי?

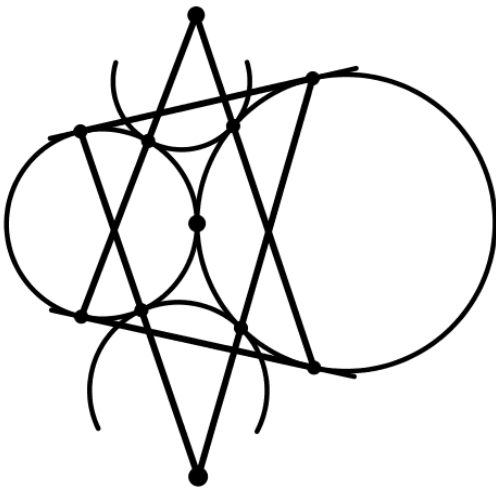
2. דני מקבל  $N$  מספרים טבעיים שונים. מטרתו לבחור 9 מהם ולסדר אותם בתוך ריבוע  $3 \times 3$  כך שהפרש של כל שני מספרים באותה שורה יתחלק ב-2, ובכל עמודה המספרים יהיו מסודרים בסדר עולה מלמטה למעלה.

עבור אילו ערכי  $N$  הוא יוכל בהכרח להשיג את מטרתו?

(חסמים ותוצאות חלקיות יזכו בניקוד חלקי).

3. נגדיר  $f(n) = \prod_{k=1}^n (-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}$ , כאשר  $\lfloor x \rfloor$  הוא הערך השלם של  $x$ .

חשבו את  $f(1)f(2) + f(2)f(3) + \dots + f(5778)f(5779)$ .

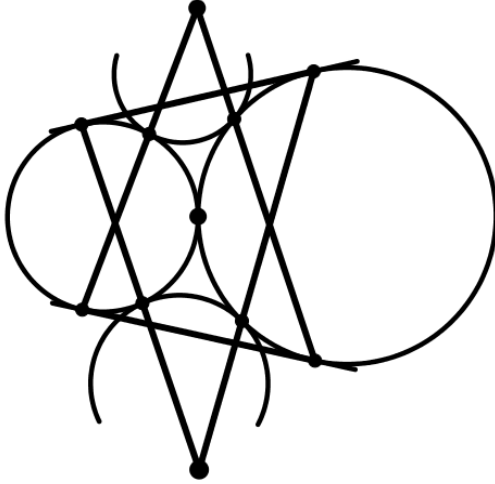


4. מעגלים  $\alpha$  ו- $\beta$  משיקים זה לזה בנקודה  $T$  באופן חיצוני. ישר  $\ell_1$  משיק ל- $\alpha$  בנקודה  $A_1$  ול- $\beta$  בנקודה  $B_1$ . ישר נוסף,  $\ell_2$  משיק ל- $\alpha$  בנקודה  $A_2$  ול- $\beta$  בנקודה  $B_2$ . מעגל  $\mu$  שחותך את הקטע  $A_1B_1$  משיק ל- $\alpha$  ו- $\beta$  בנקודות  $A_3$  ו- $B_3$  בהתאמה. מעגל  $\nu$  שחותך את הקטע  $A_2B_2$  משיק ל- $\alpha$  ו- $\beta$  בנקודות  $A_4$  ו- $B_4$  בהתאמה. הישרים  $A_1A_4$  ו- $B_1B_4$  נפגשים בנקודה  $N$ . הישרים  $A_2A_3$  ו- $B_2B_3$  נפגשים בנקודה  $S$ . הראו כי  $S, T, N$  נמצאים על ישר אחד.

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון



1. מעגלים  $\alpha$  ו- $\beta$  משיקים זה לזה בנקודה T באופן חיצוני. ישר  $l_1$  משיק ל- $\alpha$  בנקודה  $A_1$  ול- $\beta$  בנקודה  $B_1$ . ישר נוסף,  $l_2$  משיק ל- $\alpha$  בנקודה  $A_2$  ול- $\beta$  בנקודה  $B_2$ . מעגל  $\mu$  שחותך את הקטע  $A_1B_1$  משיק ל- $\alpha$  ו- $\beta$  בנקודות  $A_3$  ו- $B_3$  בהתאמה. מעגל  $\nu$  שחותך את הקטע  $A_2B_2$  משיק ל- $\alpha$  ו- $\beta$  בנקודות  $A_4$  ו- $B_4$  בהתאמה. הישרים  $A_1A_4$  ו- $B_1B_4$  נפגשים בנקודה N. הישרים  $A_2A_3$  ו- $B_2B_3$  נפגשים בנקודה S. הראו כי S, T, N נמצאים על ישר אחד.

2. הוכיחו את הזהות:

$$\left( \sum_{m=1}^{5779} \varphi(m) \left\lfloor \frac{5779}{m} \right\rfloor \right)^2 = \sum_{1 \leq i, n, k \leq 5779} \varphi(i) \varphi(n) \varphi(k) \left\lfloor \frac{5779}{\text{lcm}(i, n, k)} \right\rfloor$$

כאשר  $\varphi$  היא פונקציית אוילר.

3. דני מקבל N מספרים טבעיים שונים. מטרתו לבחור 9 מהם ולסדר אותם בתוך ריבוע  $3 \times 3$  כך שהפרש של כל שני מספרים באותה שורה יתחלק ב-3, ובכל עמודה המספרים יהיו מסודרים בסדר עולה מלמטה למעלה. האם הוא בוודאות יוכל להשיג את מטרתו

א. כאשר  $N = 17$  ?

ב. כאשר  $N = 20$  ?

ג. כאשר  $N = 19$  ?

**בהצלחה!**

## קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. במשולש  $ABC$  נסמן ב- $D$  את עקב הגובה מ- $A$  ל- $BC$  וב- $H$  את מפגש הגבהים. המעגל החסום במשולש  $BHD$  משיק לצלעות  $BH, DH$  בנקודות  $M, I$  בהתאמה. המעגל החסום במשולש  $ACD$  משיק לצלעות  $AC, DC$  בנקודות  $N, K$  בהתאמה. הוכיחו כי  $MI \perp NK$ .

2. נגדיר סדרה באופן הבא:  $a_1 = 100$  ולכל  $n \geq 2$ ,  $a_n$  היא כמות המופעים של המספר  $a_{n-1}$  בין המספרים  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . מצאו את  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10000}$ .

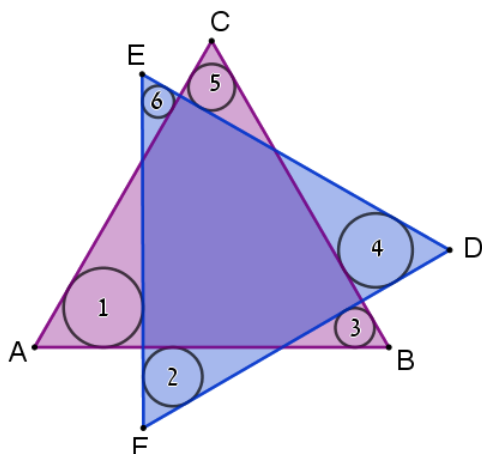
3. מה יותר גדול:  $2 \cdot 2019!$  או  $\sqrt{1^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + 1} \cdot \dots \cdot \sqrt{2019^2 + 1}$ ?

4. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$  כך ש-  $f(m) + f(mk) \mid m + k \cdot f(m)$ .

**בהצלחה!**

## תחרות קבוצתית (רותם + ירדן)

1. לוח משבצות  $8 \times 8$  רוצף על ידי אבני דומינו  $1 \times 2$ . שתי אבנים תקראנה סמוכות זו לזו, אם הן חולקות במשותף צלע של אחת ממשבצות הלוח. מהי הכמות המירבית של זוגות סמוכים?
2. נתונות שתי סדרות של מספרים שלמים  $\alpha_n, \beta_n$ . בנוסף מגדירים שתי סדרות **סומות** של מספרים שלמים  $a_n, b_n$  כך ש- $a_1 = 0, b_1 = 1$ , שמקיימות כללי נסיגה:  $b_{n+1} = b_n^{20} + \beta_n a_n^{19}$ ,  $a_{n+1} = b_n^{57} + \alpha_n a_n^{79} - 1$ . לכל  $n > N$  כך ש- $a_{n+1} = a_n$ .
3. ליובל המבולבל יש לוח ומחברת. תחילה, על הלוח רשומים המספרים 1, 2, 3, ..., 21. בכל שלב בוחר יובל 3 מספרים  $x, y, z$  הכתובים על הלוח, כותב במחברת את המספר  $(x+y)(x+z)(y+z)$ , מוחק מהלוח את המספרים  $x, y, z$  וכותב על הלוח את המספר  $x+y+z$  במקום. האם ניתן לדעת מראש את סכום המספרים שיהיו כתובים במחברת (כשיישאר על הלוח מספר אחד בלבד)?



4. היקפי המשולשים שווי הצלעות החופפים ABC ו-DEF נחתכים ב-6 נקודות, כמו בציור. החלקים של משולש ABC שלא נמצאים בתוך DEF הם 3 משולשים, וחסומים בהם מעגלים שרדיוסיהם  $r_1, r_3, r_5$ . החלקים של משולש DEF שלא נמצאים בתוך ABC הם 3 משולשים, וחסומים בהם מעגלים שרדיוסיהם  $r_2, r_4, r_6$ .

א. האם בהכרח  $r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 + r_6$ ?

ב. האם בהכרח  $r_1^2 + r_3^2 + r_5^2 = r_2^2 + r_4^2 + r_6^2$ ?

ג. האם בהכרח  $r_1^3 + r_3^3 + r_5^3 = r_2^3 + r_4^3 + r_6^3$ ?

5. מצאו את כל הרשימות  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{99})$  של מספרים מרוכבים המקיימות:

$$x_1 + \dots + x_{99} = x_1^2 + \dots + x_{99}^2 = x_1^3 + \dots + x_{99}^3 = \dots = x_1^{100} + \dots + x_{99}^{100}$$

6. א. חלוקה של מלבן למלבנים תיקרא משעממת אם יש תת קבוצה של המלבנים שאיחודם הוא מלבן (שאינו המלבן הגדול או אחד מהמלבנים הקטנים). לאילו ערכי  $n \geq 2$  יש חלוקה לא משעממת של מלבן ל- $n$  מלבנים?

ב. אותה שאלה, אך מחליפים מלבנים במשולשים משוכללים.

7. נתונות שתי אליפסות  $\alpha, \beta$  בעלות אותו זוג מוקדים, ומשולש ABC שחסום ב- $\alpha$  וחסום את  $\beta$ . בוחרים נקודה G על הקשת AB של האליפסה  $\alpha$ . המרחקים מ-G לישרים BC, CA, AB הם

$$\frac{1}{d_c} = \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b}$$

הוכיחו כי  $d_a, d_b, d_c$  בהתאמה. הוכיחו כי

בהצלחה!