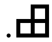
15/4/2019 **מחנה אביב** י' בניסן תשע"ט

קבוצת רותם

1. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל Γ. תיכוניו נפגשים בנקודה M והגבהים שלו בנקודה H. עקב הגובה מ-A הוא D. הישר AM חותך את Γ שנית בנקודה U. המשך הישר DM חותך את הקשת BC (שלא מכילה את A) בנקודה Z.

הראו כי $\sphericalangle \mathrm{HZU}=90^\circ$.

2. פינה היא אחת מהצורות הבאות – , , או . עבור אילו ערכים של M, N ניתן לרצף מלבן $M \times N$ על ידי פינות, כך שלא יהיה בו מלבן קטן יותר שמרוצף על ידי פינות?

3. מספרים חיוביים a,b,c,d מקיימים $a+b+c+d=1$.

הראו כי $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d+a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc} \geq 16$.

בהצלחה!

פתרון.

$$LHS=\sum_{cyc}^{3}\frac{1}{a}+\frac{1}{d+\ldots}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}^{3}\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{d+\ldots}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}^{3}\frac{2\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^{2}-\left(a-b\right)^{2}}+\frac{1}{d+\ldots}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}^{3}\frac{1}{\frac{a+b}{2}-\frac{\left(a-b\right)^{2}}{2\left(a+b\right)}}+\frac{1}{d+\ldots}\geq$$

$$\stackrel{CS}{\geq}\frac{16}{a+b+c+d+\sum_{cyc}^{3}\left(-\frac{\left(a-b\right)^{2}}{2\left(a+b\right)}+a^{2}-ab\right)}\geq$$

$$\geq\frac{16}{1-\sum_{cyc}^{3}\left(-\frac{\left(a-b\right)^{2}}{2}+a^{2}-ab\right)}=\frac{16}{1-0}=16$$