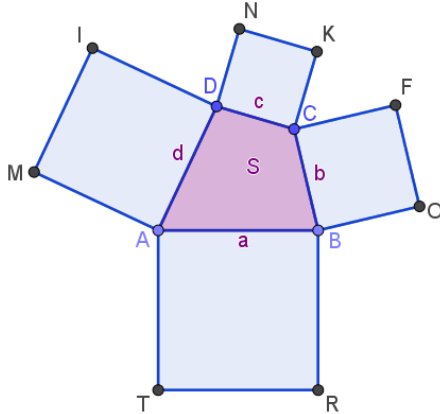


קבוצת דן

אין להשתמש במחשבון

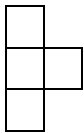


1. נתון מרובע קמור ABCD ששטחו  $S$ , ואורכי צלעותיו הם  $a, b, c, d$ . על צלעותיו בונים כלפי חוץ ריבועים:  $ADIM$ ,  $BCFO$ ,  $ABRT$  ו- $CDNK$ . מצאו נוסחה לשטח של המתומן MINKFORT באמצעות  $a, b, c, d$  ו- $S$ .

2. חמישה מספרים שלמים חיוביים מקיימים

$$a_1 a_2 a_3 < a_3 a_4 a_5 < a_5 a_1 a_2 < a_2 a_3 a_4 < a_4 a_5 a_1$$

מצאו את הערך המינימלי האפשרי של  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ .



3. צורת T היא ארבע משבצות בטבלה, שלאחת מהן יש צלע משותפת עם 3 משבצות אחרות. בכל משבצת של טבלה  $10 \times 10$  רשום מספר שלם, כך שבכל צורת T סכום כל המספרים אי-זוגי. האם ניתן לדעת על סמך נתון זה, האם סכום כל המספרים בטבלה הוא זוגי או אי-זוגי?

בהצלחה!

## קבוצת דן

אין להשתמש במחשבון

4. נתונים חמישה מספרים שלמים חיוביים  $a, b, c, d, e$ . סכום של כל שלושה מתוך המספרים מתחלק בכל אחד משני המספרים האחרים. כמו כן,  $a + b + c + d + e$  הוא מספר ראשוני. מצאו את כל האפשרויות עבור  $a + b + c + d + e$ .

5. שתי הלוטרות, גמל ודורבן, משחקים משחק. נתון לוח משבצות לבן  $m \times n$ , כאשר  $m, n > 1$ . בכל תור, הלוטרה צובעת 8 משבצות (שלא נצבעו עד כה) שיוצרות צורה קשירה (ניתן ללכת מכל משבצת לכל משבצת דרך צלעות). גמל מתחיל, ומי שלא יכול לעשות את תורו מפסיד.  
מי מנצח? התשובה יכולה להיות תלויה ב- $m$  ו- $n$ .

**בהצלחה!**

## קבוצת דן

$$1. \text{ פתרו את מערכת המשוואות (במספרים ממשיים): } \begin{cases} (x+y)^2 = z^3 \\ (x+z)^2 = y^3 \\ (y+z)^2 = x^3 \end{cases}$$

2. במשולש ABC חוצי הזוויות נפגשים בנקודה I. מעגל מסוים שמרכזו I חותך כל צלע פעמיים (ולא את המשך הצלע). נקודות חיתוך של מעגל עם הצלעות הן K, M, N, O, P, Q. וזה הסדר שלהם על המעגל. הוכיחו כי שטח המשולש PNK שווה לשטח המשולש MOQ.

3. נתונה פונקציה  $f: \{2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \{2, 3, 4, \dots\}$  כך שלכל  $m, n \geq 2$  שלמים זרים, מתקיים  $f(m+n) = f(m) + f(n)$ . הוכיחו שתנאי זה מתקיים לכל  $m, n \geq 2$  גם כאלה שיש להם מחלק משותף הגדול מ-1.

4. נתונים  $m, n \geq 2$  שלמים. עוגה מלבנית חולקה לפרוסות מלבניות על ידי קווים המקבילים לצלעות העוגה, כך שנוצרה טבלה  $m \times n$ . כאשר רשמו את שטחי הפרוסות לפי הגודל, התקבלה סדרה חשבונית. הוכיחו שכל הפרוסות הן שוות שטח.

5. קוביה  $3 \times 3 \times 3$  מחולקת ל-27 תאים  $1 \times 1 \times 1$ . היפו מעופף רוצה לבקר בכל תא פעם אחת בדיוק; הוא יכול לעבור מתא לתא אם יש להם פאה משותפת, אבל הוא לא מוכן לעשות שני מעברים ברצף באותו כיוון. האם הוא יוכל לעבור על כל הקוביות ולשמור על הכללים האלה? מותר לו לבחור משבצת התחלתית כרצונו.

**בהצלחה!**

1. מצאו את כל השלשות של מספרים שלמים חיוביים  $a, b, c$  עבורם מתקיים

$$\frac{1}{a + \frac{b}{c}} + \frac{1}{b + \frac{c}{a}} + \frac{1}{c + \frac{a}{b}} = 1$$

2. נתונים  $m, n \geq 2$  שלמים. עוגה מלבנית חולקה לפרוסות מלבניות על ידי קווים המקבילים לצלעות העוגה, כך שנוצרה טבלה  $m \times n$ . כאשר רשמו את שטחי הפרוסות לפי הגודל, התקבלה סדרה חשבונית. הוכיחו שכל הפרוסות הן שוות שטח.

3. קוביה  $3 \times 3 \times 3$  מחולקת ל-27 תאים  $1 \times 1 \times 1$ . היפו מעופף רוצה לבקר בכל תא פעם אחת בדיוק; הוא יכול לעבור מתא לתא אם יש להם פאה משותפת, אבל הוא לא מוכן לעשות שני מעברים ברצף באותו כיוון. האם הוא יוכל לעבור על כל הקוביות ולשמור על הכללים האלה? מותר לו לבחור משבצת התחלתית כרצונו.

4. המספרים  $x, y, z$  הינם חיוביים. נגדיר מספרים נוספים:

$$A = y^2 + yz + z^2, \quad B = x^2 + xz + z^2, \quad C = x^2 + xy + y^2$$

$$\sqrt{2A + 2B - C} + \sqrt{2A + 2C - B} + \sqrt{2B + 2C - A} \geq 3(x + y + z)$$

הוכיחו כי

**בהצלחה!**

## קבוצת רותם

1. שריג נוצר ממשולש שווה צלעות (הווקטורים של צלעות המשולש יוצרים את השריג). נבחרו 3 נקודות שריג, שיוצרות משולש ישר זווית T. האם יתכן שעל צלעות המשולש T אין נקודות שריג נוספות?

2. איילה וברווז משחקים משחק. בהתחלה יש 50 ארגזים, ו-100 כדורים הממוספרים מ-1 עד 100 המונחים מחוץ לארגזים. בכל מהלך, השחקן שתורו לשחק לוקח שני כדורים הנמצאים מחוץ לארגזים ומכניס אותם לארגז ריק. בסוף המשחק, החורפן מכפיל את מספרי שני הכדורים בכל ארגז, וסוכם את כל התוצאות האלו. אם יצא לו מספר אי-זוגי איילה מנצחת, ואם יצא לו מספר זוגי אז ברווז מנצח. איילה משחקת ראשונה. מי ינצח במשחק?

3. במשולש ABC, I היא מרכז המעגל החסום. נסמן ב-D את נקודת ההשקה של המעגל החסום עם הצלע BC. הישר DI חותך את המעגל שנית בנקודה E. הנקודה P היא נקודה נוספת על המעגל החסום כך ש- $AP = AE$ . הישר AP חותך שנית את המעגל החסום של המשולש בנקודה Q. מעבירים משיקים מ-Q למעגל החסום, שמשיקים לו בנקודות X ו-Y. נגדיר את הנקודה K להיות החיתוך של הישר XY והישר EP. הוכיחו ש-K נמצאת על הציר הרדיקלי של המעגל החסום והחוסם.

**בהצלחה!**

## תחרות קבוצתית – דן+ירדן

$$1. \text{ מצאו את שארית החלוקה ב-7 של } \binom{n+7}{7} - \binom{n}{7}$$

2. נתון משושה קמור ABCDEF. בנוסף, נתון כי

$$\angle ABF = \angle BAC = \angle CDB = \angle DCE = \angle EFD = \angle FEA$$

הוכיחו כי המשולשים ACE ו-BDF הינם חופפים (לאו דווקא בהתאמה).

3. בשורה רשומים כל המספרים הטבעיים  $1, 2, 3, \dots$ . קרל מכסה  $g$  מהמספרים, כך שמתקיים החוק הבא: סכום כל שני מספרים לא מכוסים (לא בהכרח שונים) הוא מספר לא מכוסה. קרל רוצה שסכום המספרים שכיסה יהיה גדול ככל האפשר. כמה גדול הוא יכול להיות?

4. מצאו את כל הפונקציות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך שלכל  $x, y$  ממשיים מתקיים

$$f(f(y) + x) = 3f(x) - 2x + f(y)$$

5. במישור צוירו מספר סופי של ריבועים שלאף שניים מהם אין נקודות פנימיות משותפות. ריבועים נקראים סמוכים אם יש להם קטע גבול משותף (בעל אורך חיובי). עבור איזה  $n$  יתכן שלכל ריבוע יש בדיוק  $n$  ריבועים סמוכים?

6. על פני לוח משבצות אינסופי, נתבונן בכל הקטעים שמחברים נקודות שריג סמוכות. שני קטעים שונים נקראים שכנים, אם יש להם קודקוד משותף. בכל זמן נתון, כל קטע כזה הוא חי או מת. ברגע ההתחלתי יש כמות סופית של קטעים חיים. בכל דקה, מצב הלוח משתנה: כל קטע יהיה חי בדקה הבאה אם ורק אם בדקה הקודמת היו לו מספר אי-זוגי של שכנים חיים. האם יתכן שהחיים בלוח האינסופי יגמרו בדיוק לאחר 5779 דקות מהרגע ההתחלתי?

7. נתון משולש חד-זוויות ABC. נסמן ב-I את מפגש חוצי הזוויות שלו, ב-H את מפגש הגבהים שלו, וב-O את מרכז המעגל החוסם אותו. זוויות המשולש יסומנו ב- $\alpha, \beta, \gamma$ , כאשר  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . נתון כי  $IO = IH$ . מצאו את הזווית  $\beta$ .

8. איילה וברווז משחקים משחק. בהתחלה יש 50 ארגזים, ו-100 כדורים הממוספרים מ-1 עד 100 המונחים מחוץ לארגזים. בכל מהלך, השחקן שתורו לשחק לוקח שני כדורים הנמצאים מחוץ לארגזים ומכניס אותם לארגז ריק. בסוף המשחק, החורפן מכפיל את מספרי שני הכדורים בכל ארגז, וסוכם את כל התוצאות האלו. אם יצא לו מספר אי-זוגי איילה מנצחת, ואם יצא לו מספר זוגי אז ברווז מנצח.

איילה משחקת ראשונה. מי ינצח במשחק?

**בהצלחה!**