

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים ש-

$$f(x) + f(y) = f(xy) + f(f(x) + f(y))$$

2. יהי $n > 3$ שלם. נתונים שלמים a_1, a_2, \dots, a_n כך ש- $a_k \in \{k, -k\}$ לכל $1 \leq k \leq n$. הוכיחו שקיימים אינדקסים $1 \leq k_1, k_2, \dots, k_n \leq n$, לא בהכרח שונים, עבורם הסכומים

$$a_{k_1}$$

$$a_{k_1} + a_{k_2}$$

$$a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3}$$

...

$$a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \dots + a_{k_n}$$

כולם שונים זה מזה מודולו $2n + 1$, והאחרון מביניהם מתחלק ב- $2n + 1$.

3. יהי ABC משולש חד זווית, מרכז המעגל החסום במשולש יסומן ב- I ומרכז המעגל החוסם את המשולש יסומן ב- O . אמצע הקשת \widehat{BC} של המעגל החוסם של ABC , שלא מכילה את A , תסומן ב- S . על הישר OI נבחרו נקודות E, F כך ש- BE ו- CF מאונכים ל- OI . האנך מ- E ל- AC נחתך עם האנך מ- F ל- AB בנקודה X . האנך מ- E ל- CS נחתך עם האנך מ- F ל- BS בנקודה Y . אם D היא עקב האנך מ- I ל- BC , הוכיחו כי X, Y, D נמצאות על ישר אחד.

בהצלחה!