יש מצב?

1. א. האם קיימים במישור שני מצולעים חופפים בעלי 7 צלעות, שכל הקודקודים שלהם מתלכדים, אבל אף שתי צלעות שלהם לא מתלכדות?
ב. אותה שאלה עבור שלושה מצולעים.
תזכורת: מצולע זה קו שבור סגור שלא חותך את עצמו.

2. במשולש העבירו 3 צ'ביאנות, שנחתכות בנקודה אחת. הציור שהתקבל מורכב מ-12 קטעים (כי כל צלע וכל צ'ביאנה מורכבת משני קטעים). האם בכל מקרה ניתן להרכיב 4 משולשים מ-12 הקטעים האלה?

3. נתון אוסף סופי של פונקציות מחזוריות רציפות, כשמחזור של כל פונקציה קטן מ-1. האם יתכן שסכום הפונקציות הוא פונקציה עולה ממש על פני קטע באורך 1?

4. נתון לוח Φ (לאו דווקא מלבני) שמורכב ממספר סופי של משבצות. בנוסף נתונים 2022 סוגים שונים של מרצפות שגם הן מורכבות ממשבצות (שתי מרצפות שנבדלות על ידי סיבוב או שיקוף הן מאותו סוג).
א. האם יש מצב שלכל 1001 סוגים שתבחרו ניתן לרצף את Φ באמצעות מרצפות מסוגים אלה, ולאף 1000 סוגים אי-אפשר?
ב. האם יש מצב שלכל 1000 סוגים שתבחרו ניתן לרצף את Φ באמצעות מרצפות מסוגים אלה, ולאף 1001 סוגים אי-אפשר לרצף תוך שימוש בכל ה-1001 סוגים?

5. א. לאילו ערכי n קיימים n מספרים שלמים חיוביים שונים $a_1, a_2, ..., a_n$ עבורם השברים $\frac{k}{a_k}$ מצומצמים ומתקיים $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\cdots+\frac{n}{a_n}=1$?
ב. האם קיימים מספרים שלמים חיוביים שונים בזוגות $x_1, x_2, ..., x_{5780}$, ותמורה שלהם $y_1, y_2, ..., y_{5780}$, כך ש-x_i זר ל-y_i לכל i, והמספר $\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+...+\frac{x_{5780}}{y_{5780}}$ הוא שלם?

6. במישור אוקלידי נמצאים 5776 חרגולים נקודתיים. בהתחלה כולם נמצאים בשדה עגול, שמרכזו בנקודה A ורדיוסו 10 מטרים, ואף שלושה לא נמצאים על ישר אחד. הם שואפים להגיע לדשא הירוק יותר של השכן – שגם הוא בצורת עיגול, אשר מרכזו בנקודה B ורדיוסו 1 מטר. המרחק בין הנקודות A ו-B הוא 100 מטרים. בכל מהלך חרגול אחד קופץ מעל חרגול אחר, כך שהחרגול האחר יהיה באמצע הקטע שמחבר את נקודת ההתחלה של הקפיצה עם נקודת היעד שלה. האם החרגולים יכולים להשיג את מטרתם?

7. בשפה הטוווסית יש מספר סופי של כללים שלפיהן ניתן לשנות מילים. כל הכללים הם מהצורה: בכל חלק של מילה ניתן להחליף רצף של אותיות X באמצעות רצף של אותיות Y. למשל $(c \leftarrow b),(a \leftarrow aa)$ זו אפשרות אחת לכלליים של טווסית. לפי כללים אלה ניתן לעשות סדרה של שינויים למילה $aabaa$, למשל $aabaa \leftarrow abaa \leftarrow aba \leftarrow aca$ ואחרי זה כבר אי-אפשר לשנות את המילה. נגיד שעבור מילה התחלתית W סדרת שינויים היא **מלאה** אם היא מסתיימת במילה שכבר לא ניתן לשנות אותה. האם יתכן שקיימים כללים אפשריים לטווסית ומילה W, כך שכמות השינויים בכל סדרה מלאה שמתחילה ב-W היא ריבוע שלם, וכל ריבוע שלם מתקבל על ידי איזושהי סדרה?

8. בהשראת המשחק "נים", נמר המציא משחק משלו. הוא בחר מספרים שלמים חיוביים k, וקבוצה סופית S של סדרות באורך k של מספרים שלמים.
לפי כללי המשחק, בהתחלה נתונות ערמות של $n,0,...,0$ גפרורים (k ערמות בסה"כ), ובנוסף ערמה אינסופית של גפרורים. איילה וברווז משחקים בתורות, איילה מתחילה. במהלך ניתן לבחור סדרה $(b_1,b_2,...,b_k)$ מ-S, ואז להוסיף b_1 גפרורים לערמה הראשונה, להוסיף b_2 גפרורים לערמה השנייה, ... , להוסיף b_k גפרורים לערמה ה- k. אם b_i שלילי, כשמדובר על להוסיף b_i גפרורים לערמה ה- i זה בעצם לקחת ממנה $-b_i$ גפרורים; כמות הגפרורים בערמה אף פעם לא שלילית. השחקן שלא מסוגל לבצע מהלך בתורו, מפסיד.
האם יש מצב שנמר בחר k ו-S כך שעבור כל n שהוא חזקה של 2 לאיילה יש אסטרטגיה מנצחת, ועבור כל n שאינו חזקה של 2 לברווז יש אסטרטגיה מנצחת?

בתאבון!