

התאמות

1. רגע בזמן נקרא אופטימי, אם בהליכה עם כיוון השעון ממחוג השעות למחוג הדקות לא פוגשים את מחוג השניות, ופסימי אחרת. מה הסיכוי שרגע אקראי נתון יהיה אופטימי? מדובר בשעון מתמטי מושלם, שמחוגיו זזים ברציפות.

2. בשורה נמצאות 100 נורות כבויות וליד כל נורה כפתור שמשנה את המצב שלה (דלוק/כבוי). בדקה הראשונה לוחצים על כל הכפתורים, בדקה השנייה על כל כפתור שני, בדקה השלישית על כל כפתור שלישי וכך הלאה, בדקה ה-100 רק על הכפתור האחרון (כי מספרו מתחלק ב-100). כמה נורות יהיו דולקות בסוף?

3. שלושה פיראטים קיבלו חבית מלאה בשתייה. לכל פיראט קצב שתייה קבוע משלו. לפי תור, כל פיראט שותה (בקצב שלו) במשך הזמן הדרוש לשני הפיראטים האחרים לשתות ביחד שליש מהחבית, וכך החבית נגמרת. פי כמה מהר יותר היו הפיראטים מסיימים את החבית לו היו שותים ממנה בו-זמנית?

4. בחדר נמצאים שני שולחנות: על אחד מהם נמצאת כמות כלשהי של מטבעות, שצדמ האחד שחור וצדמ השני לבן. ראשון נכנס דני, כשהאור דולק, סופר כמה מהם עם הצד הלבן למעלה, וכמה עם הצד השחור, ומספר את הכמויות ליוסי. אחרי זה מכבים את האור, ויוסי נכנס. הוא הופך כמה מטבעות שהוא רוצה ומעביר כמה שהוא רוצה לשולחן השני (בלי לראות). האם תמיד הוא יכול לדאוג שמספר מטבעות עם הצד הלבן למעלה בשני השולחנות יהיה שווה?

5. זיו בוחר באופן אקראי מספר מ-1 עד 10 (לכל מספר אותו סיכוי), ויעל בוחרת באופן אקראי מספר מ-1 עד 11 (גם לכל מספר אותו סיכוי). מה הסיכוי שהמספר של זיו קטן ממש מהמספר של יעל?

6. בקבוצה 100 איברים.

א. הוכיחו שיש אותה כמות של תתי-קבוצות בגודל זוגי ושל תתי-קבוצות בגודל אי-זוגי.

ב. מה יש יותר, תתי-קבוצות בגודל שמתחלק ב-4 או תתי-קבוצות בגודל זוגי שאינו מתחלק ב-4?

7. יעל ויוסי מסמנים משבצות ריקות בלוח אינסופי לפי התור: יעל ב-X, יוסי ב-O. מי שיוצר רצף של 5 במאונך או במאונך, מנצח. יעל מתחילה. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

8. הראו כי $f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_{2n}$ כאשר $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

9. יוסי ודני משחקים במשחק הבא. בהתחלה על השולחן מונחות 11 ערימות של 10 אבנים כל אחת. כל שחקן בתורו לוקח 1, 2 או 3 אבנים, אבל יוסי במהלך שלו לוקח את כל האבנים מאותה ערימה (כלשהי), ודני לוקח כל אבן מערימה שונה (במקרה שהוא לוקח יותר מאבן אחת). יוסי מתחיל. מפסיד מי שלא יכול לבצע מהלך. למי מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?

10.* איה ובני יוצאים לטיול בארכיפלג 2009 האיים (אזור בתוך הים שמורכב מ-2009 איים). איים מסוימים מחוברים במסלולי סירות דו-כיווניים. איה ובני משחקים משחק בזמן הטיול: איה בוחרת את האי הראשון בו יעגנו. כעת, כל אחד בתורו בוחר מהו האי הבא אליו הם מפליגים, מבין האיים בהם עוד לא ביקרו, כאשר בני מתחיל. שחקן שאין לו מהלך חוקי, מפסיד. הוכיחו כי איה תמיד יכולה לנצח.

11. חשבי את כמות המספרים השלמים החיוביים אשר קטנים מ-1,000,000, מתחלקים ב-7, וברישימם העשרוני אין שימוש בספרות שאינן 0, 1 או 9.

12.* בשורה N מקומות חנייה. בכניסה כל רכב מקבל פתק עם מספר המקום שבו הוא אמור לחנות. המכונה שמחלקת פתקים מגרילה כל פעם מספר מ-1 עד N עם סיכויים שווים, בלי קשר לפתקים הקודמים (יתכן ששני רכבים יקבלו אותו מספר). כל רכב מגיע למקום המיועד לו לפי הפתק, ומנסה לחנות שם; אם המקום תפוס, אז הוא מתקדם למקום הבא ומנסה לחנות בו, וכך הלאה. אם רכב מסוים מגיע למקום N ולא מצליח לחנות שם, הוא יוצא מהחניון. מה הסיכוי לכך, ש-N רכבים יגיעו לחניון ריק וכולם יצליחו לחנות?