

## התאמות

1. א. רגע בזמן נקרא שמח, אם בהליכה עם כיוון השעון ממחוג השעות למחוג הדקות לא פוגשים את מחוג השניות, ועצוב אחרת. מה הסיכוי שרגע אקראי נתון יהיה שמח? מדובר בשעון מתמטי מושלם, שמחוגיו זזים ברציפות.

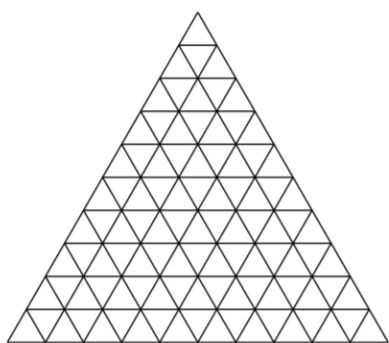
ב. רגע בזמן נקרא שמח אם כל שלושת מחוגי השעון נמצאים בחצי מעגל אחד. האם ביממה יש יותר רגעים שמחים מלא שמחים?

2. האם קיים מספר טבעי שיש לו כמות אי-זוגית של מחלקים זוגיים וכמות זוגית של מחלקים אי-זוגיים?

3. זיו בוחר באופן אקראי מספר מ-1 עד 10 (לכל מספר אותו סיכוי), ויעל בוחרת באופן אקראי מספר מ-1 עד 11 (גם לכל מספר אותו סיכוי). מה הסיכוי שהמספר של זיו קטן ממש מהמספר של יעל?

4. נתון מסך מלבני בגודל  $m \times n$  בכל משבצת יש נורה ולפחות  $(m-1) \times (n-1) + 1$  מהנורות דולקות. אם בריבוע  $2 \times 2$  כלשהו דולקת רק נורה אחת אז גם היא תפסיק לדלוק כעבור זמן מה. הוכיחו כי לפחות נורה אחת תישאר דלוקה לנצח.

5. יוסי ספר את כל המילים בעלות N אותיות המורכבות רק מהאותיות T, O, W, N בהן מספר מופעי האותיות T ו-O שווים. דני ספר את כל המילים בעלות  $2N$  אותיות המורכבות רק מהאותיות T ו-O בהן מספר מופעי האותיות T ו-O שווים. מי ספר יותר מילים?



6. כמה מקביליות יש בצורה שבציור?

7. א. טורבו החילזון מתחיל מהנקודה  $(0,0)$ , הולך על פי קווי הרשת ורוצה להגיע לנקודה  $(n, n)$  מבלי לעבור מעל לישר  $y = x$ , כמה דרכים יש לו לעשות זאת?

ב. טורבו רוצה להתחיל מ- $(0,0)$ , לעשות  $2n$  מהלכים ולחזור ל- $(0,0)$  כמה אופציות יש לו לעשות זאת?

8. יהי  $n$  טבעי, נתבונן בכל הנקודות  $(x, y)$  במישור כך ש- $x, y$  שלמים אי-שליליים ו- $x + y < n$ . כל אחת מהנקודות הללו נצבעת באדום או בכחול כך שמתקיים התנאי: אם נקודה  $(x, y)$  צבועה באדום אז כך גם כל הנקודות  $(x', y')$  כאשר  $x' \leq x, y' \leq y$ . הוכיחו כי כמות הדרכים לבחור  $n$  נקודות כחולות שכולן בעמודות שונות שווה לכמות הדרכים לבחור  $n$  נקודות כחולות שכולן בשורות שונות.

9. נתון עץ עם  $N$  קודקודים, ליד כל קודקוד רושמים את מספר הדרכים למספר את הקודקודים מ-1 עד  $N$  כך שבכל מסלול המתחיל בקודקוד המספרים מופיעים בסדר עולה. התברר שהמספרים הרשומים ליד כל הקודקודים חוץ מאחד מתחלקים ב-2000 הוכיחו כי גם המספר הרשום ליד הקודקוד האחרון מתחלק ב-2000.

10. מספר סופי של צפרדעים יושבות בנקודות שלמות שונות על הישר הממשי. בכל מהלך צפרדע אחת בדיוק קופצת 1 ימינה, ואסור לצפרדע לקפוץ לנקודה בה יושבת צפרדע אחרת. סופרים את כמות הדרכים השונות בהן הצפרדעים יכולות לבצע את  $n$  המהלכים הראשונים (עבור סידור התחלתי מסוים). הוכיחו כי אם בכל מהלך לצפרדעים היה מותר לקפוץ 1 שמאלה ואסור לקפוץ ימינה, מספר הדרכים לבצע את  $n$  המהלכים הראשונים מאותו סידור התחלתי לא היה משתנה.

11. תמורה  $\sigma$  של המספרים  $1, 2, \dots, 2n$  תקרא מוצלחת אם קיים לפחות  $i$  אחד כך ש- $|\sigma(i) - \sigma(i + 1)| = n$ . קבעו האם קיימות יותר תמורות שהן מוצלחות או יותר תמורות שהן לא מוצלחות.

12. רצף מספרים טבעיים (לא בהכרח שונים) באורך  $n$  נקרא מגניב אם לכל מספר ברצף  $m$ , המספר  $m - 1$  מופיע ברצף גם הוא ו- $m - 1$  מופיע ברצף בפעם הראשונה לפני ש- $m$  מופיע בפעם האחרונה. מצאו את כמות הרצפים המגניבים.

**בתיאבון!**