

לא קומבי

תהא A תת-קבוצה של $\mathbb{Z}_{>0}$. נסמן ב- A_k את כמות איברי הקבוצה שלא עולים על k .
צפיפות הקשוחה של הקבוצה A היא $\rho(A) = \inf_k \frac{a_k}{k}$ כלומר מספר הכי גדול עבורו
 $\rho \cdot k \leq a_k$ לכל k .

אם A, B תתי-קבוצות של $\mathbb{Z}_{>0}$, ניתן להגדיר $A+B$ באמצעות

$$A+B = A \cup B \cup \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

1. בוחרים 52 מספרים שלמים שונים בין 1 ל-100. הראו כי סכום של שניים מהם שווה ל-100.

2. הראו שאם $\rho(A) + \rho(B) \geq 1$ אז $\rho(A+B) = 1$.

3. הראו שבכל מקרה $\rho(A) + \rho(B) - \rho(A)\rho(B) \leq \rho(A+B)$.

4. הראו שאם $\rho(A) > 0$ אז קיים n כך ש- $\underbrace{A + \dots + A}_n = \mathbb{Z}_{>0}$.

5. (י.ש.) מבין מספרים שלמים אי-שליליים x_1, x_2, \dots, x_m לכל היותר t לא מתאפסים.
 הראו כי $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot t \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$.

6. נגיד ש- A, B קבוצות סופיות, $f_1, f_2 : A \rightarrow B$ פונקציות כלשהן.

$$N_{i,j} = \#\{(x, y) \mid f_i(x) = f_j(y)\}$$

הראו כי $N_{1,2} \leq \frac{N_{1,1} + N_{2,2}}{2}$.

7. נתונות קבוצות סופיות X, A, B , כאשר $\#X = m$, ופונקציה $F : A \times X \rightarrow B$.

$$K = \#\{(a, b, x, y) \mid f(a, x) = f(b, y), a, b \in A, x, y \in X\}$$

$$L = \#\{(a, b, x) \mid f(a, x) = f(b, x), a, b \in A, x \in X\}$$

הראו כי $K \leq mL$.

8. נניח שלמשוואה $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ יש n_1 פתרונות, ולמשוואה $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + 1$ יש n_2 פתרונות בהנחה ש- x_i, y_i, z_i לא עולים על 10^9 . הראו כי $n_1 \geq n_2$.

9. נתון מספר טבעי $n > 1$. הראו שקיימים אינסוף C עבורם

א. למשוואה $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n = C$ אין פתרון בשלמים במספרים שלמים אי-שליליים.

ב. למשוואה $\sum_{i=1}^n x_i^n = C$ אין פתרון בשלמים במספרים שלמים אי-שליליים.

ג. למשוואה $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^n = C$ יש הרבה פתרונות שונים במספרים שלמים אי-שליליים.

10. נגדיר קבוצה $S(m, t) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \ 1 \leq x_i, \prod_{i=1}^m x_i < t \right\}$.

הראו כי $\text{Vol}(S(m, t)) \leq t \cdot (\ln t)^{m-1}$

בתאבון!