הרמת אקספוננט

כל האותיות בתרגיל זה מסמנות מספרים שלמים חיוביים.

1. מצאו את כל המצבים בהם:
א. 2^n-1 מתחלק ב- 3^k.
ב. 3^n-1 מתחלק ב- 2^n.
ג. 9^n-1 מתחלק ב- 7^n.
ד. 5^n+1 מתחלק ב- 3^n.

2. הראו שלכל $a>2$ המספר $a^{a-1}-1$ אינו חסר ריבועים.

3. אם ראשוני אי-זוגי p מחלק את a^b-1, אז הוא מופיע באותה חזקה ב- $b\cdot\left(a^{\gcd(b,p-1)}-1\right)$.

4. מספר טבעי n נקרא מתרבע, אם לכל a שעבורו a^n-1 מתחלק ב- n, בהכרח a^n-1 מתחלק אפילו ב- n^2.
א. הראו כי כל מספר ראשוני (חזקת ראשוני?) הוא מתרבע.
ב. הראו כי קיימים אינסוף פריקים מתרבעים.

5. מצאו את כל הטבעיים n עבורם קיימים $k>1$ ומספרים x,y זרים עבורם $3^n=x^k+y^k$.

6. יהיה p ראשוני ו- $m>1$ שלם. הראו שאם עבור $x,y>1$ שלמים $\dfrac{x^p+y^p}{2}=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^m$, אזי $m=p$.

7. עובר אילו m קיים k עבורו k^3+17 מתחלק ב- 3^m אך לא ב- 3^{m+1}.

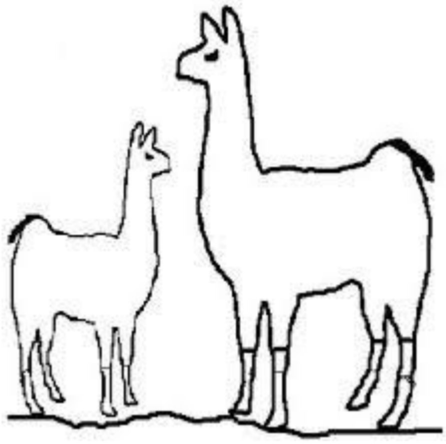
8. נניח כי $1<b<a$, כאשר b אי-זוגי, ומתקיים $b^n\mid a^n-1$. הוכיחו כי $a^b>\dfrac{3^n}{n}$.

9. עבור אילו n המספר 2^n+1 מתחלק ב- n^2?

10. מצאו את כל הזוגות (n,p) כאשר p ראשוני, $(p-1)^n+1$ מתחלק ב- n^{p-1}.
א. (IMO 1999) ובנוסף $n<2p$.
ב. באופן כללי.

11. מצאו את כל השלשות (a,m,n) עבורן $(a+1)^n$ מתחלק ב- a^m+1.

בתאבון!



בכל הגרסאות $p \nmid x \ \& \ p \nmid y$

$v_p\left(x^n - y^n\right) = v_p\left(x-y\right) + v_p\left(n\right)$	$p \mid x-y$	$p \neq 2$
$v_p\left(x^n + y^n\right) = v_p\left(x+y\right) + v_p\left(n\right)$	$2 \nmid n \ \& \ p \mid x+y$	
$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x-y\right) + v_2\left(n\right)$	$4 \mid x-y$	$p = 2$
$v_2\left(x^n - y^n\right) = v_2\left(x-y\right) + v_2\left(x+y\right) + v_2\left(n\right) - 1$	$2 \mid n \ \& \ 2 \mid x-y$	