שריגים ותורת המספרים

1. מצאו את כמות הזוגות של מספרים טבעיים (m,n) ששניהם לא עולים על 1000 ומתקיים $\frac{m}{n+1}\le\sqrt{2}\le\frac{m+1}{n}$.

2. נתונים שישה מספרים שלמים: a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 שמקיימים

$$\gcd(a_1-a_2,b_1-b_2)=\gcd(a_1-a_3,b_1-b_3)=\gcd(a_2-a_3,b_2-b_3)=1.$$

נתון שלמערכת משוואות אי-השוויונים

$$\begin{cases}(a_1-x)(b_2-y)>(a_2-x)(b_1-y)\\(a_2-x)(b_3-y)>(a_3-x)(b_2-y)\\(a_3-x)(b_1-y)>(a_1-x)(b_3-y)\end{cases}$$

יש פתרון אחד לפחות במספרים שלמים, ולכל פתרון בשלמים למערכת מתקיים $x=y$. מצאו את כל הערכים האפשריים של $a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3$.

3. נגדיר במישור **טבעת**: מקום גיאומטרי של נקודות שהמרחק שלהן מנקודה ספציפית O הוא לפחות r ולכל היותר R. כדי להגדיר טבעת צריך לבחור את המרכז O ושני מספרים $r<R$ שנקראים רדיוסים; נשתמש בסימונים אלה בשביל כל טבעת שנדבר עליה, ונסמן ב-S את שטח הטבעת. נקודה במישור נקראת שלמה אם שתי הקואורדינטות שלה שלמות.

א. לכל n טבעי, הראו שקיימת טבעת שלא מכילה אף נקודה שלמה, כך ש-$S>3n$ ו-$R<2^{2^n}$.

ב. הראו שכל טבעת המקיימת $100\cdot R<S^2$ מכילה נקודה שלמה.

4. הוכיחו שלכל ראשוני p גדול מספיק יש מספר שלם $0<a<\sqrt{p}$ כך ש-a הוא שארית ריבועית מודולו p.

5. יהי $P\in\mathbb{Z}[x]$ פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים, שכל שורשיו המרוכבים z הם עם ערך מוחלט $|z|=1$. הוכיחו שכל שורשיו הם שורשי יחידה.

6. יהי $p=2\ell+1$ ראשוני כך ש-ℓ גם ראשוני. יהיו a,b,c שלמים. הוכיחו שיש לכל היותר $\sqrt{2p}$ פתרונות למשוואה $x^a+x^b+x^c=0$.

7. יהי ν מספר אי רציונאלי ו-$m>0$ מספר שלם. זוג מספרים שלמים חיוביים (a,b) נקרא **טוב**, אם $a\lceil \nu b\rceil-b\lfloor \nu a\rfloor=m$. זוג טוב (a,b) נקרא **מצוין**, אם שני הזוגות $(a-b,b)$, $(a,b-a)$ אינם טובים. הוכיחו שמספר הזוגות המצוינים שווה לסכום המחלקים החיוביים של m.