

קפיצות ויאטה

1. נתון מספר טבעי n , ומספר t לאו דווקא שלם שמקיים $t + t^{-1} = n$. הראו שהמספר $t^m + t^{-m}$ הוא שלם.

2. משחק קומבינאטורי מתחיל משלישיית מספרים שרשומים על הלוח: $\{0, 1\}$. בכל שלב מותר למחוק את אחד המספרים ולרשום במקומו את סכום שני המספרים האחרים. אילו שלישיות של מספרים ניתן לקבל בצורה כזאת?

3. נניח כי a, b, c טבעיים ובנוסף $0 \leq d = a^2 + b^2 - abc \leq c$. הראו ש- d ריבוע שלם.

4. פתרו את המשוואה $(x+2)(y+2)(z+2) = (x+y+z+2)^2$ במספרים טבעיים.

5. הראו שלמשוואה $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 65 = abcde$ קיים פתרון שבו כל המספרים גדולים מ-5780.

6. מצאו את כל הרביעיות של מספרים שלמים חיוביים a, b, m, n כך ש-

$$a^m b^n = (a-b)^2 + 1$$

7. המספרים m, n שלמים ומאותה זוגיות, כך ש- $n^2 - 1$ מתחלק ב- $q = m^2 - n^2 + 1$, ובנוסף $q > 0$. הראו כי \sqrt{q} שלם.

בתאבון!