

שמורות

1. על הלוח כתובים המספרים 5,6,7,8,9,10 בכל שלב ושלב בוחרים שלושה מספרים עוקבים ומוסיפים 1 לשלושתם או מחסירים 1 משלושתם. האם ניתן להגיע למצב 5,7,7,9,10,10.
2. על הלוח כתובים המספרים 5,6,7,8,9 בכל שלב ושלב, בוחרים שני מספרים a, b שרשומים על הלוח ומחליפים אותם ב- $\frac{4a+3b}{5}, \frac{3a-4b}{5}$. האם לאחר מספר פעולות ניתן להגיע למצב 5,7,7,7,9?
3. נתון מצולע קמור $A_1A_2 \dots A_{2n}$ ונקודה P בתוך המצולע שלא נמצאת על אף אחד מאלכסוני המצולע. הוכיחו כי P נמצאת בכמות זוגית של משולשים מהצורה $A_iA_jA_k$.
4. צפרדע יושבת בנקודה $(0,1)$. כל דקה הצפרדע קופצת מהנקודה (x, y) לאחת מהנקודות $(y, x), (3x, -2y), (-2x, 3y), (x + 1, y + 4), (x - 1, y - 4)$ הוכיחו כי הצפרדע לא יכולה להגיע לנקודה $(0,0)$.
5. באי חיות 17 זיקיות אפורות, 15 זיקיות ירוקות ו-13 זיקיות חומות. כאשר שתי זיקיות מצבע שונה נפגשות, שתיהן מחליפות צבע לצבע השלישי (למשל אם זיקית אפורה וזיקית חומה נפגשו שתיהן הופכות להיות ירוקות וכו'). האם יכול לקרות שכעבור כמה זמן כל הזיקיות באי יהיו באותו צבע?
6. לקרנף יש קמטי עור אופקיים ואנכיים, חלקם בצד ימין וחלקם בצד שמאל, סך הכל 27 קמטים. אם הקרנף מגרד את אחד הצדדים שלו על עץ, אז שני קמטים אופקיים או שני קמטים אנכיים על הצד הזה נעלמים, ועל הצד השני מופיעים קמט אחד אופקי וקמט אחד אנכי. אם אין שני קמטים באותו כיוון, אז שום דבר לא קורה. הקרנף גירד את עצמו מספר פעמים. האם יכול להיות שעכשיו בכל צד מספר הקמטים האנכיים זהה למספר הקמטים האופקיים שהיו לפני זה, ומספר הקמטים האופקיים זהה למספר הקמטים האנכיים שהיו לפני זה?
7. על ישר ממוקמים שני אסימונים, האסימון השמאלי כחול והאסימון הימני אדום. בכל שלב ניתן להוריד שני אסימונים סמוכים בצבע זהה או להוסיף שני אסימונים סמוכים (בכל נקודה על הישר) בצבע זהה. האם ניתן להגיע למצב שבו על הישר יש שני אסימונים אבל האסימון השמאלי אדום והימני כחול?

8. המספר 1 רשום על הלוח 9999 פעמים. מותר לנו לבצע את אחת משתי הפעולות הבאות:

(i) למחוק מהלוח ארבעה מספרים x, x, y, y ולרשום על הלוח את המספרים $x + y, x - y$.

(ii) למחוק אפסים מהלוח.

האם ייתכן שנגיע למצב שבו:

א. רק מספר אחד רשום על הלוח?

ב. לכל היותר שלושה מספרים רשומים על הלוח?

9. על הלוח רשום זום המספרים $(1,1)$ בכל שלב אם על הלוח מופיע אחד מהזוגות $(x, y - 1), (x + y, y + 1)$ אז ניתן להחליפו בזוג השני. באופן דומה, אם מופיע אחד מהזוגות $(x, xy), (\frac{1}{x}, y)$ אז ניתן להחליפו בזוג השני. הוכיחו כי בכל הזוגות שנכתוב המספר הראשון יהיה חיובי.

10. במישור מונחת מחט. בכל שלב ניתן לסובב את המחט ב- 45° סביב אחד הקצוות שלה. האם אפשר להחזיר את המחט למיקום ההתחלתי שלה כך ששני הקצוות שלה יתחלפו במקומם?

11. במעגל ממוקמים חיילי אוטלו. חלקם עם השחור כלפי מעלה וחלקם עם הלבן כלפי מעלה. בכל שלב ניתן לבחור לבצע את אחת משתי הפעולות הבאות:

(i) לבחור חייל שחור, להוריד אותו מהלוח ולהפוך את שני החיילים שעמדו לידו.

(ii) להוסיף חייל שחור ולהפוך את שני החיילים שעומדים לידו.

הוכיחו שאם התחלנו משני חיילים שחורים ואפס חיילים לבנים במעגל, לא נצליח להגיע למצב שבו יש שני חיילים לבנים ואין חיילים שחורים.

בתאבון!