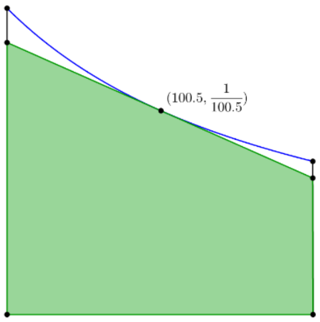
אינטגר∫ים

1. מה גדול יותר $1.01^{100.5}$ או e?

<u>פתרון:</u> לוקחים לוג לשני האגפים אז שואלים מה גדול יותר $100.5 \cdot \ln\left(\frac{101}{100}\right)$ או 1. או במילים אחרות, מה גדול יותר $\ln(101) - \ln(100)$ או $\frac{1}{100.5}$. נשים לב ש-



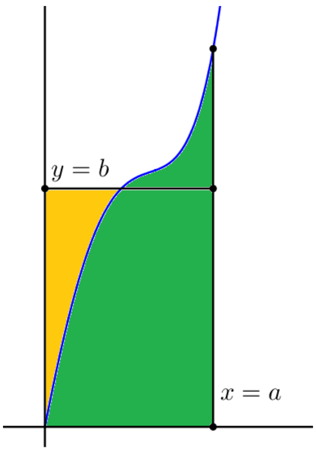
$$\ln(101) - \ln(100) = \int_{100}^{101} \frac{1}{x} dx$$

כלומר זה השטח מתחת לגרף של $\frac{1}{x}$ בקטע $[100,101]$. מצד שני $\frac{1}{100.5}$ שווה לערך של $\frac{1}{x}$ באמצע הקטע. נעביר את המשיק ל-$\frac{1}{x}$ ב-100.5 ונחתוך עם הישרים $x = 100, x = 101$, התקבל טרפז ישר זווית שהשטח שלו הוא $\frac{1}{101.5}$ אבל $\frac{1}{x}$ קמורה ולכן המשיק נמצא מתחת לפונקציה ולכן כל הטרפז נמצא מתחת לפונקציה ולפיכך שטח הטרפז קטן מהאיטגרל.

2. תהי $x_0, x_1, \dots$ סדרה עולה של שלמים אי-שליליים. נסמן ב-a_j את כמות ה-i-ים עבורם $x_i \leq j$, ידוע ש-a_j סופי לכל j. הוכיחו כי לכל m, n שלמים חיוביים

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=0}^{m} a_i \geq (n+1)(m+1)$$

<u>פתרון:</u> השאלה היא מקרה דיסקרטי של הטענה הבאה: תהי f פונקציה טובה ומונוטונית עולה בקטע $[0, c]$ עבורה $f(0) = 0$. יהיו $a \in [0, c], b \in [0, f(c)]$ אזי



$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

הטענה הזו ברורה מהציור משמאל: האינטגרל הראשון מחשב את השטח הירוק והאינטגרל השני מחשב את השטח הצהוב. סכום השטחים גדול משטח המלבן שנוצר מהצירים והישרים $x = a, y = b$.

בשאלה שלנו x_i מתאימים ל-$f(x)$ ו-a_i מתאימים ל-$f^{-1}(x)$ וזה פשוט הגרסה הדיסקרטית של הציור שציירנו מקודם.

3. הוכיחו את הזהויות:

א. $\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ב. $\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{1}{n+1}$

פתרון: א.

$$\int_0^1 (x+1)^n dx = \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

$$\int_0^1 (x+1)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \binom{n}{m} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} dx \ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \frac{1}{m+1}$$

ב. אותו דבר אבל האינטגרל הוא מ-$1-$ עד 0:

$$\int_{-1}^0 (x+1)^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_{-1}^0 (x+1)^n dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{-1}^0 \binom{n}{m} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} dx \ = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot \frac{(-1)^m}{m+1}$$

ג. $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

פתרון:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{m} &= \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{m+1} \int_0^1 x^{m-1}\, dx \\ &= \int_0^1 \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (-1)^{m+1} x^{m-1} dx = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-x)^k dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

הערה מגניבה: הוכחנו שהסכום ההרמוני עד n שווה לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx$$

הדבר המגניב הוא שהזהות הזו נכונה לכל n לא רק טבעי, אפשר אפילו להציב n מרוכב.

ד. $\displaystyle\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\binom{n}{1} + \frac{1}{2n-3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = \frac{(-1)^n 2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

פתרון: צד שמאל שווה ל-

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^{n-k}\binom{n}{n-k} x^{2k} dx = \int_0^1 (x^2-1)^n = \int_0^1 (x-1)^n \cdot (x+1)^n dx$$

נשים לב שאם נשנה כאן סימן ל-x אז שום דבר לא ישתנה (כל ה-xים הם בחזקות זוגיות בסכום שממנו התחלנו) ולכן ניתן להחליף את תחום האינטגרציה מ-$[0,1]$ ל-$[-1,1]$ וכל מה שישתנה זה שנצטרך לכפול ב-2. לפיכך:

$$2LHS = \int_{-1}^{1}(x-1)^n \cdot (x+1)^n dx = \left.\frac{(x+1)^{n+1}\cdot(x-1)^n}{n+1}\right|_{-1}^{1} -$$
$$-\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{n-1}\cdot(x+1)^{n+1}dx$$

המחובר הראשון מתאפס ולמחובר השני נמשיך לעשות אינטגרציה בחלקים, כל פעם אחד הגורמים יתאפס עד שנגיע לגורם האחרון שיהיה שווה ל-

$$(-1)^n \cdot \left.\frac{n!^2\,(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|_{-1}^{1} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

נשאר לחלק ב-2 ונקבל את הזהות המבוקשת.

ה. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$

<u>פתרון:</u> תזכורת על פונקציית β:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}dx$$
$$= \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^{n-m}\right|_0^1 + \frac{n-m}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-m-1}dx$$

ושוב המחובר הראשון מתאפס ואפשר להמשיך הלאה ונקבל שכל האינטגרל שווה ל-

$$\frac{m!\,(n-m)!}{(n+1)!}$$

ועכשיו לשאלה:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{m}} = \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} x^m(1-x)^{n-m}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^n\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}-1\right)}{\frac{x}{1-x}-1}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{2x-1}dx$$

באגף ימין יש לנו ביטוי מהצורה

$$\sum \frac{2^m}{m} = \sum 2 \cdot \int_0^1 (2x)^{m-1} dx = 2\int_0^1 \frac{(2x)^{n+1}-1}{2x-1} dx$$

נשאר לנו להוכיח ש-

$$2^n \cdot \int_0^1 \frac{x^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{2x-1} dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 \frac{(2x)^{n+1}-1}{2x-1} dx$$

נחסר בין שני הביטויים:

$$\int_0^1 \frac{2^n x^{n+1} - 2^n (1-x)^{n+1} - 2^{n+1} x^{n+1} + 1}{2x-1} dx$$
$$= -\int_0^1 \frac{2^n x^{n+1} + 2^n (1-x)^{n+1} - 1}{2x-1} dx$$

האינטגרל הזה בברור שווה ל-0 כי יש סימטריה ביחס לחצי ולכן ניצחנו (צריך רק לציין שלא מחלקים ב-0 בחצי. זה בגלל ש המונה מתאפס ב- $x = \frac{1}{2}$).

4. נתונים $0 = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = 0$ ו-$0 \le b_1, \dots, b_n$ מספרים ממשיים ו-$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2$. ידוע שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש-$|a_i - a_{i-1}| \le b_i$. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \le 2$$

<u>פתרון:</u> אפשר להניח ש-a_iנ חיוביים. סמן נקודות $0, b_1, b_1 + b_2, \dots, b_1 + \dots + b_n = 2$ על הקטע $[0,2]$. מעל לנקודה ה-i נסמן נקודה בגובה a_i, הנתון למעשה אומר שהשיפוע של כל קטע הוא בין $1-$ ל-1 ומה שאנחנו רוצים לחשב זה את סכום השטחים של הטרפזים המתקבלים. כל הטרפזים נמצאים בתוך משולש שנוצר מהישריים $y = x, y = -x + 2$ וציר ה-x, שטח המשולש הזה הוא 1 ולכן ניצחנו.

5. בשורה כתובים שני מספרים: 0 ו-1. בכל שלב מתבצעת אוטומטית הפעולה הבאה: בין כל שני מספרים a ו-b שמופיעים ברצף נכתב המספר $\left(\frac{\sqrt[15]{a}+\sqrt[15]{b}}{2}\right)^{15}$. אחרי שלב אחד יש בשורה 3 מספרים, לאחר שני שלבים 5 מספרים וכו'. כעבור 15 שלבים כתובים בשורה די הרבה מספרים. מצאו את החלק השלם של הסכום שלהם.

<u>פתרון:</u> המספרים שכתובים על הלוח יהיו $\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}$ כאשר $0 \le k \le 2^{15}$ ולכן אנחנו רוצים לחשב את הסכום הבא:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}$$

נתבונן בפונקציה $f(x)=x^{15}$. נחסום את השטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע $[0,1]$, נחלק את הקטע לקטעים קטנים באורך $\frac{1}{2^{15}}$ ונצייר מלבנים מסביב לגרף: יש שתי אופציות לצייר מלבן בגובה $\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}$ מעל לקטע $\left[\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15},\left(\frac{k+1}{2^{15}}\right)^{15}\right]$ או מעל לקטע $\left[\left(\frac{k-1}{2^{15}}\right)^{15},\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}\right]$ אם נסכום את שטחי המלבנים הראשונים נקבל חסם מלמטה על האינטגרל ואם נסכום את את שטחי המלבנים מהסוג השני נקבל חסם מלמעלה. סך הכל קיבלנו ש-

$$\sum_{k=0}^{2^{15}-1}\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}\cdot\frac{1}{2^{15}}<\int_0^1 x^{15}<\sum_{k=1}^{2^{15}}\left(\frac{k}{2^{15}}\right)^{15}\cdot\frac{1}{2^{15}}$$

נכפיל פי 2^{15} ונקבל ש-

$$S-1<2^{15}\cdot\frac{1}{16}=2^{11}<S$$

וזה בדיוק מראה לנו מה החלק השלם של S הוא 2^{11}.

6. הוכיחו כי לכל a,b,c חיוביים מתקיים

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+4b}\geq\sum_{cyc}\frac{1}{a+2b+2c}$$

<u>פתרון:</u> נשים לב ש-

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+4b}=\sum_{cyc}\int_0^1 t^{a+4b-1}\,dt$$

וגם

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+2b+2c}=\sum_{cyc}\int_0^1 t^{a+2b+2c-1}$$

נסמן $x=t^a,y=t^b,z=t^c$. נחליף בין האינטגרל לסכום ונטען שמה שהא"ש נכון על הפונקציות בתוך האינטגרל, אפילו בלי לעשות את האינטגרל עצמו.

$$\sum_{cyc}xy^4\overset{?}{\geq}\sum_{cyc}xy^2z^2$$

$$\sum_{cyc}\frac{y^3}{z}\overset{?}{\geq}\sum_{cyc}yz$$

וזה נכון כי

$$\sum_{cyc}\frac{y^3}{z}=\sum_{cyc}\frac{y^4}{yz}\geq\frac{(\sum y^2)^2}{\sum yz}\geq\frac{(\sum yz)^2}{\sum yz}$$

הערה: הפתרון מביא שיטה להמציא אי שוויונים. לוקחים א"ש כלשהו על x, y, z מסמנים $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ ועושים אינטגרל לפי t על מה שיוצא. כמובן שלא נקבל ככה אי-שוויונים הדוקים, הרי לכל t הא"ש נכון ואנחנו סוכמים את הטעויות לכל t. עדיין, אפשר לקבל ככה שאלות חמודות, נסו להמציא משהו בעצמכם.

7. לכל x, y ממשיים חיוביים ו-m, n שלמים חיוביים הוכיחו את אי-השוויון

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^m y^n + x^n y^m) \geq$$
$$\geq mn(x^{m+n-1} \cdot y + y^{m+n-1} \cdot x)$$

<u>פתרון:</u> נעביר אגפים:

$$mn(x^{m+n} + y^{m+n} - yx^{m+n-1} - xy^{m+n-1})$$
$$\geq (m+n-1)(x^{m+n} + y^{m+n} - x^m y^m - x^n y^m)$$

נפרק לגורמים:

$$mn(x^{m+n-1} - y^{m+n-1})(x-y) \geq (m+n-1)(x^m - y^m)(x^n - y^n)$$

נחלק בדברים:

$$\frac{1}{x-y} \cdot \frac{(x^{m+n-1} - y^{m+n-1})}{m+n-1} \geq \left(\frac{x^m - y^m}{(x-y) \cdot m}\right) \cdot \frac{x^n - y^n}{(x-y) \cdot n}$$

ופה כבר רואים את האינטגרל:

$$\frac{1}{x-y} \int_y^x t^{m-1} \cdot t^{n-1} dt \geq \frac{1}{x-y} \int_y^x t^{m-1} dt \cdot \frac{1}{x-y} \int_y^x t^{n-1} dt$$

זה נקרא א"ש צ'בישוב אינטגרלי.

הניסוח הכללי הוא עבור f, g מונוטונית עולות (או מונוטונית יורדות, אם אחת עולה והשנייה יורדת אז צריך להחליף את הכיוון של הא"ש, בדיוק כמו בגרסה הדיסקרטית) בקטע $[y, x]$ מתקיים ש-

$$\frac{1}{x-y} \int_y^x f(t) \cdot g(t) dt \geq \frac{1}{x-y} \int_y^x f(t) dt \cdot \frac{1}{x-y} \int_y^x g(t) dt$$

נוכיח את א"ש צ'בישוב האינטגרלי הכללי: כמו במקרה הדיסקרטי, הכל נובע מכך שלכל $t, s \in [y, x]$ מתקיים ש-

$$\big(f(t) - f(s)\big) \cdot \big(g(t) - g(s)\big) \geq 0$$

נפתח סוגריים ונקבל:

$$f(t)g(t) + f(s)g(s) \geq f(t)g(s) + f(s)g(t)$$

נאנטגרל את הא"ש האחרון ונקבל:

$$\int_y^x \int_y^x f(t) \cdot g(t) + f(s)g(s) ds dt \geq \int_y^x \int_y^x f(t) \cdot g(s) + f(s)g(t) ds dt$$

$$2\int_y^x\int_y^x f(t)\cdot g(t)\,dsdt \geq 2\int_y^x\int_y^x f(t)\cdot g(s)\,dsdt$$

$$(x-y)\int_y^x f(t)\cdot g(t)dt \geq \int_y^x f(t)dt\cdot\int_y^x g(t)dt$$

8. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ ממשיים חיוביים שסכומם 1. הראו כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2<\frac{1}{3}$$

<u>פתרון:</u> ננסה לפתור שאלה יותר קלה. נניח שבמקום $\frac{a_k}{1-a_k}$ היה רשום a_k.

נסמן $s_k=a_1+\cdots+a_k$. נתבונן בפונקציה $f(x)=x^2$.
הביטוי $a_k(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2$ הוא שטח המלבן $[s_{k-1},s_k]\times[0,s_{k-1}^2]$, המלבן הזה נמצא מתחת לגרף הפונקציה ולכן סכום שטחי המלבנים מהצורה הנ"ל קטן מהשטח מתחת לגרף הפונקציה ולפיכך

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2<\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

עכשיו נעבור לשאלה עצמה, נראה שתי דרכים.

<u>דרך אלגברית:</u> מספיק להראות ש-

$$\frac{a_k}{1-a_k}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2<\int_{s_{k-1}}^{s_k}x^2dx=\frac{s_k^3-s_{k-1}^3}{3}$$

נסמן $s_{k-1}=s$ ו-$a_k=a$ ונקבל שמספיק להראות ש-

$$\frac{a}{1-a}s^2<\frac{(s+a)^3-s^3}{3}$$

או במילים אחרות ש-

$$\frac{a^2}{1-a}s^2-a^2s-\frac{a^3}{3}<0$$

זו פונקציה ריבועית ב-s עם מקדם מוביל חיובי ולכן מספיק לבדוק את הא"ש בקצוות הקטע, כלומר ב-$s=0, s+a=1$. כאשר $s=0$ הכל טריוויאלי. כאשר $s+a=1$ נקבל שצריך לבדוק ש-

$$\frac{a}{1-a}s^2=s(1-s)\overset{?}{<}\frac{(s+a)^3-s^3}{3}=\frac{1-s^3}{3}$$

כלומר $(1-s)^3=1-3s+3s^2-s^3\overset{?}{>}0$ וזה נכון.

<u>דרך גיאומטרית:</u> במקום להכפיל את שטחי המלבנים פי $\frac{1}{1-a_k}$, אנחנו נוסיף לכל מלבן חלק מהשטח בינו לבין הגרף של f ככה שביחס עם התוספת השטח יהיה גדול מ-$\frac{a}{1-a}s^2$.

בכל נקודה (s_k, s_k^2) נעביר משיק ל-f ונחתוך אותו עם הישר האופקי הבא, כלומר עם $x = s_{k+1}$. המשיק נחתך עם הישר בנקודה $(s_{k+1}, s_k^2 + 2a_{k+1}s_k)$. למעשה אנחנו לפני כן דיברנו רק על המלבן הירוק שנמצא מתחת לגרף הפונקציה ועכשיו אנחנו מוסיפים לו את המשולש האדום.

השטח של הטרפז שנוצר הוא

$$\frac{1}{2}a_{k+1}(s_k^2 + s_k^2 + 2a_{k+1}s_k) = s_k \cdot a_{k+1}(s_k + a_{k+1}) = a_{k+1} \cdot s_k \cdot s_{k+1}$$

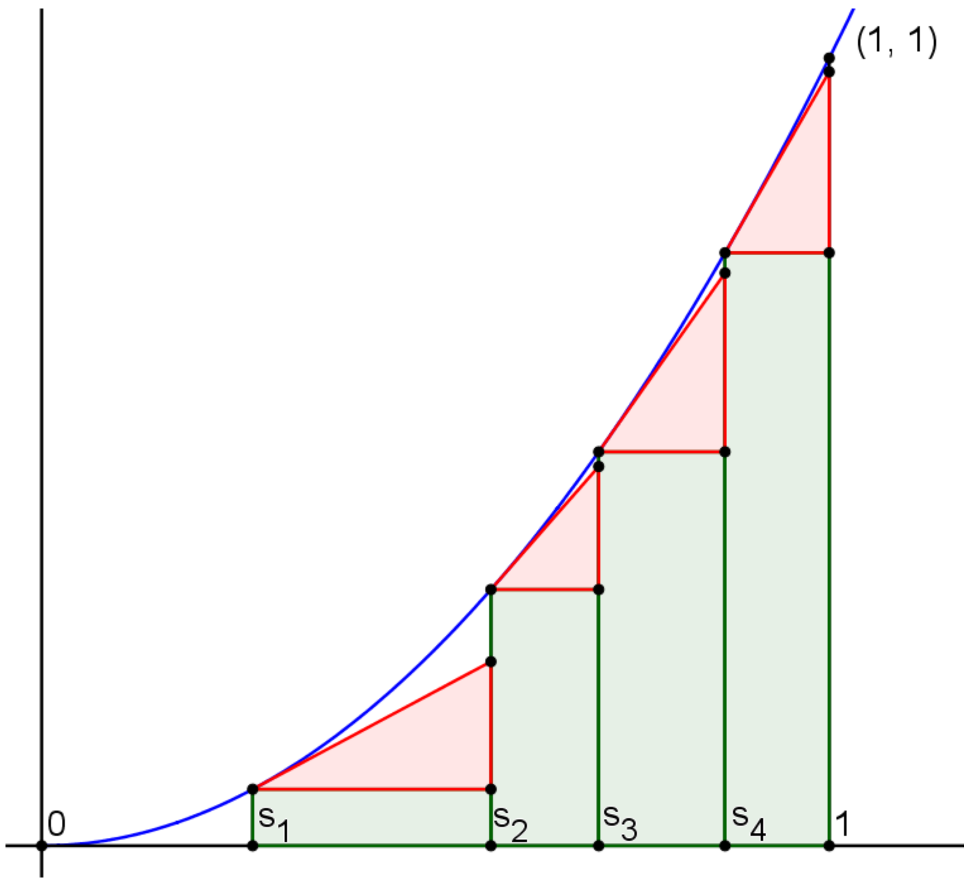
כעט, כל מה שנשאר להראות הוא ש-

$$\frac{a_{k+1}}{1 - a_{k+1}} \cdot s_k^2 \leq a_{k+1} \cdot s_k \cdot s_{k+1}$$

כלומר ש-

$$\frac{s_k}{s_{k+1}} = 1 - \frac{a_{k+1}}{s_{k+1}} \overset{?}{\leq} 1 - a_k$$

וזה ברור כי $s_{k+1} \leq 1$.



9. לכל $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ ממשיים חיוביים מתקיים ש-

א. $$\left(\sum_{1\le i,j\le n} \min(a_i, b_j)\right)^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} \min(a_i, a_j) \cdot \sum_{1\le i,j\le n} \min(b_i, b_j)$$

<u>פתרון:</u> יש תיאור למינימום שאנחנו הולכים להשתמש בו הרבה:

$$\min(a,b) = \int_0^\infty I_{[0,a]}(x) \cdot I_{[0,b]}(x)\,dx$$

לפני שנראה את הפתרון, נזכיר את קושי שוורץ האינטגרלי:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right) \cdot \left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$$

ההוכחה זהה להוכחה של קושי-שורץ הרגיל: נתבונן בביטוי

$$\left(xf(t) + g(t)\right)^2$$

ונעשה לו אינטגרל לפי t על הקטע $[a,b]$. ברור שהאינטגרל יצא חיובי, הרי הביטוי עצמו חיובי. נקבל פולינום ריבועי ב-x:

$$x^2\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right) + 2x\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) \cdot \left(\int_a^b g(t)dt\right) + \left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$$

הפולינום חיובי ולכן הדיסקרימיננטה שלו שלילית, כלומר:

$$4\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right) \cdot \left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right) \le 0$$

וזה מוכיח את קושי שוורץ.

נעבור לפתרון השאלה:

$$\left(\sum_{1\le i,j\le n} \min(a_i, b_j)\right)^2 = \left(\sum_{1\le i,j\le n} \int_0^\infty I_{[0,a_i]}(x) \cdot I_{[0,b_i]}(x)\,dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^\infty \sum_{1\le i,j\le n} I_{[0,a_i]}(x) \cdot \sum_{1\le i,j\le n} I_{[0,b_i]}(x)\,dx\right)^2 \le$$

$$\le \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i,j\le n} I_{[0,a_i]}(x)\right)^2 dx \cdot \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i,j\le n} I_{[0,b_i]}(x)\right)^2 dx$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n} \min(a_i, a_j) \cdot \sum_{1\le i,j\le n} \min(b_i, b_j)$$

ב. $$0 \le \sum_{1\le i,j\le n} b_i b_j \min(a_i, a_j)$$

הוכיחו כי בסעיף ב' אי-השיוויון נכון גם כאשר ה-b-ים לאו דווקא חיוביים.

פתרון: דומה מאוד לסעיף הקודם.

$$\sum_{1\le i,j\le n} b_i b_j \min(a_i, a_j) = \sum_{1\le i,j\le n} \int_0^\infty b_i I_{[0,a_i]}(x) \cdot b_j I_{[0,a_j]}(x)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \sum_{1\le i,j\le n} b_i I_{[0,a_i]}(x) \cdot b_j I_{[0,a_i]}(x)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i,j\le n} b_i I_{[0,a_i]}(x) \right)^2 dx \ge 0$$

ג. $$\sum_{1\le i<j\le n} \left(|b_i - b_j| + |a_i - a_j|\right) \le \sum_{1\le i,j\le n} |b_i - a_j|$$

פתרון: הרעיון הוא להפוך ערכים מוחלטים למינימום בעזרת הוא הנוסחה הבאה:

$$|a_i - a_i| = a_i + a_j - 2\min(a_i, a_j)$$

נוסיף באגף שמאל את המחוברים עבורם $i = j$ (מותר כי הם שווים ל-0). נציב את הנוסחה, הסכומים של הכל יתקזזו (כל a_i מופיע n פעמים) ולכן מה שצריך להוכיח זה:

$$\sum_{1\le i,j\le n} 2min\ (a_i, b_j) \le \sum_{1\le i,j\le n} min(a_i, a_j) + min\ (b_i, b_j)$$

נציב אינטגרלים ונקבל שצריך להוכיח ש-

$$\int_0^\infty \sum_{1\le i,j\le n} 2 I_{[0,a_i]}(x) \cdot I_{[0,b_j]}(x)$$
$$\le \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i\le n} I_{[0,a_i]}(x) \right)^2 + \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i\le n} I_{[0,b_i]}(x) \right)^2$$

נעביר אגפים ונקבל ש-

$$0 \le \int_0^\infty \left(\sum_{1\le i\le n} I_{[0,a_i]}(x) - \sum_{1\le j\le n} I_{[0,b_j]}(x) \right)^2$$

10. עבור $a_1, \dots, a_n$ מספרים ממשיים הוכיחו כי

א. $$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \ge 0$$

<u>פתרון:</u> נשים לב ש-

$$\frac{a_i a_j}{i+j-1} = \int_0^1 a_i a_j x^{i+j-1-2}\, dx$$

$$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} = \int_0^1 \sum_{1\le i,j\le n} a_i a_j x^{i+j-2}\ dx = \int_0^1 \left(\sum_{1\le i,j\le n} a_i x^{i-1}\right)^2 dx$$
$$\ge 0$$

ב. $$\left(\sum_i^n a_i\right)^2 \le \sum_{1\le i,j\le n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j$$

<u>פתרון:</u>

$$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{ij}{i+j-1} a_i a_j = \int_0^1 \sum_{1\le i,j\le n} ia_i \cdot ja_j x^{i+j-2}\ dx$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{1\le i\le n} ia_i \cdot x^{i-1}\right)^2\ dx \ge \left(\int_0^1 \sum_{1\le i\le n} ia_i \cdot x^{i-1}\, dx\right)^2$$
$$= \left(\sum_i^n a_i\right)^2$$

ג. לכל $p_1, \dots, p_n$ ו-$c > 0$

$$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c} \ge 0$$

<u>פתרון עם מוטיבציה:</u> הסעיף הזה הוא הכללה של סעיף א'. בפתרון אנחנו צריכים להבין שני דברים: איך לשים $p_i + p_j$ במחנה ואיך לגרום לכך שהוא יהיה בחזקה c. את הדבר הראשון יחסית קל להבין. כלומר, אם $c = 1$ אז נעשה את הפתרון של א' רק שנחליף את x ב-$e^{-p_i x}$:

$$0 \le \int_0^\infty \left(\sum a_i e^{-p_i t}\right)^2 dt = \sum_{i,j} a_i a_j \int_0^\infty e^{-t(p_i+p_j)}\, dt = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{p_i + p_j}$$

אפשר להכליל את השיטה שלנו ל-c שלם חיובי. הרעיון הוא לעשות אינטגרציה c פעמים ואז המחנה יהיה בחזקת c. אנחנו הולכים להשתמש במספר עובדות על אינטגרלים. הראשונה בהן היא משפט של קושי על הרכבת אינטגרלים:

משפט קושי:

$$\int_a^b \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \dots dx_1 = \int_a^b f(t)\cdot\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

בשביל להוכיח את המשפט נצטרך קודם להוכיח את כלל לייבניץ עבור אינטגרלים.

<u>כלל לייבניץ האינטגרלי:</u> עבור $a(x), b(x), f(x,t)$ פונקציות טובות (גזירות ורציפות עם נגזרות רציפות) מתקיים ש-

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt + f\big(x,b(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}b(x) - f\big(x,a(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}a(x)$$

שימו לב שאם $a(x), b(x)$ פונקציות קבועות אז האינטגרל והנגזרת מתחלפים לגמרי.

<u>הוכחה:</u> אנחנו נשתמש בכך שאינטגרל מתחלף עם גבול עבור פונקציות יפות. הניסוח המדויק הוא הלמה הבאה:

<u>למה:</u> תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות וחסומות בקטע $[a,b]$, כלומר $|f_n(x)| < M$. נניח ש-f_n מתכנסת לפונקציה אינטגרבילית אזי מתקיים ש-

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

לא נוכיח את הלמה בשביל לא להעמיס עם פרטים, מקווה שהניסוח אמין.

כן נעיר שהלמה היא למעשה מקרה פרטי של משפט ההתכנסות הנשלטת שאם למדתם תורת המידה אז אתם מכירים אותו. המשפט הכללי מדבר על אינטגרלי לבג ולא אינטגרלי רימן ואז מספיק לדרוש שהגבול של הסדרה קיים ולא חייבים לדרוש שהגבול אינטגרבילי. במקרה של אינטגרל רימן הגבול לא חייב להיות אינטגרבילי, זה תרגיל נחמד למצוא דוגמה שבה הגדול לא אינטגרבילי לפי רימן. כמובן שבמקום לבקש שהגבול אינטגרבילי אפשר גם לבקש התכנסות במידה שווה.
נגיד גם שללמה לפעמים קוראים משפט ההתכנסות הנשלטת של $Arzel$ (בעוד שהקרדיט למשפט הכללי הולך ל-$Lebesgue$), מוזמנים לחפש באינטרנט הוכחה של המשפט.

למעשה אנחנו הולכים להוכיח את כלל לייבניץ עבור אינטגרל לבג, הוא נכון גם עבור אינטגרל רימן אבל ההוכחה פחות כיפית (כל הוכחה שאני מכיר מגיעה לנקודות תכניות מציקות שאפשר לטפל בהן אבל כבר יותר קל להסביר מה זה אינטגרל לבג) (אפשר להוסיף תנאים לניסוח של המשפט בשביל שההוכחה שלנו תעבוד גם לאינטגרל רימן, לא ניכנס לפרטים התכניים).
מהלמה שניסחנו בקלות נובע המקרה שבו a, b קבועות ואפילו לא נטרח לרשום אותה, מוזמנים לנסות בתור תרגיל. נראה מייד את ההוכחה לניסוח הכללי של הלמה:

$$\int_{a(x+h)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x+h)}^{a(x)} f(x+h,t)\,dt +$$

$$+\int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t)\,dt + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,dt - \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt =$$

$$= \int_{a(x)}^{b(x)} f(x+h,t) - f(x,t)dt + \int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,dt$$

$$- \int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,dt$$

ממשפט ערך הביניים קיים $a(x) \le \varepsilon \le a(x+h)$ עבורו

$$\int_{a(x)}^{a(x+h)} f(x+h,t)\,dt = \big(a(x+h) - a(x)\big) \cdot f(x+h,\varepsilon)$$

באופן דומה, קיים $b(x) \le \varepsilon' \le b(x+h)$ כך ש-

$$\int_{b(x)}^{b(x+h)} f(x+h,t)\,dt = \big(b(x+h) - b(x)\big) \cdot f(x+h,\varepsilon')$$

נציב את הנוסחאות הנ"ל בביטוי עבור הפרש האינטגרלים שפיתחנו, נחלק ב-h ונשאיף את h ל-0. נשים לב ש-$\varepsilon \to a(x), \varepsilon' \to b(x)$ ולכן סך הכל נקבל ש-

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^b f(x+h,t) - f(x,t)dt}{h} -$$

$$- \frac{da(x)}{dx} \cdot f(x,a) + \frac{db(x)}{dx} \cdot f(x,b)$$

נשאר רק לציין שאפשר להחליף בין הגבול לאינטגרל (כאמור, נכון לאינטגרל לבג, אם מדברים על אינטגרל רימן אז צריך להניח שההחלפה חוקית) ונקבל את הרצוי. עכשיו נוכל להוכיח את הנוסחה של קושי.

<u>הוכחת משפט קושי:</u> נוכיח באינדוקציה, מקרה הבסיס ברור. צעד:

$$\int_a^b \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_n} f(x_{n+1})\,dx_{n+1} \dots dx_1 = \int_a^b \int_a^{x_1} f(t) \cdot \frac{(x_1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt\,dx_1$$

מנוסחת לייבניץ נקבל ש-

$$\int_a^{x_1} f(t) \cdot (x_1-t)^{n-1}\,dt$$

$$= \frac{d}{dx_1}\left(\int_a^{x_1} f(t) \cdot \frac{(x_1-t)^n}{n}\,dt\right) - \frac{dx_1}{dx_1} \cdot \frac{f(x_1)(x_1-x_1)^n}{n}$$

נציב את זה בנוסחה שלנו:

$$\int_a^b \int_a^{x_1} f(t) \cdot \frac{(x_1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt\,dx_1 = \int_a^b \frac{d}{dx_1}\left(\int_a^{x_1} f(t) \cdot \frac{(x_1-t)^n}{n!}\,dt\right)dx_1$$

$$= \int_a^b f(t) \cdot \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt - \int_a^a f(t) \cdot \frac{(a-t)^n}{n!}\,dt$$

שזה מה שרצינו.

חזרה לפתרון השאלה:

$$0 \le \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_{c-2}}\left(\sum a_i e^{p_i x_{c-1}}\right)^2 dx_{c-1}\dots dx_1 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left(\sum a_i e^{p_i t}\right)^2 \cdot \frac{(-t)^{c-1}}{(c-1)!}dt = \sum_{1\le i,j\le n}\frac{a_i a_j}{(c-1)!}\int_0^{\infty} e^{-(p_i+p_j)t}\cdot t^{c-1}\,dt$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{a_i a_j}{(c-1)!}\int_0^{\infty} e^{-(p_i+p_j)t}\cdot t^{c-1}\,dt =$$

$$= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{a_i a_j}{(c-1)!}\int_0^{\infty} e^{-u}\cdot\left(\frac{u}{p_i+p_j}\right)^{c-1}\cdot\frac{1}{p_i+p_j}du = \sum_{1\le i,j\le n}\frac{a_i a_j}{\left(p_i+p_j\right)^c}$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בפונקציית גאמא. נזכיר את ההגדרה שלה:

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} t^{c-1}\cdot e^{-t}dt$$

התכונה החשובה של פונקציית גאמא היא שלכל c ממשי (ואפילו מרוכב) מתקיים ש-$\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$. קל להוכיח את התכונה הזו בעזר אינטגרציה בחלקים:

$$\Gamma(c+1) = \int_0^{\infty} t^c\cdot e^{-t}dt = \Big[-t^c\cdot e^{-t}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} ct^{c-1}e^{-t}dt = c\Gamma(c)$$

אפשר לחשב גם את $\Gamma(1)$:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{\infty} = 1$$

ולכן באינדוקציה נקבל שלכל n שלם מתקיים ש-$\Gamma(n+1) = n!$, זו בדיוק התכונה שהשתמשנו בה בפתרון.

נשאר להכליל את הפתרון ל-c ממשי, לשם כך ניתן לעשות אינטגרציה כמות לא שלמה של פעמים. לא נרחיב יותר מדי על הנושא, מי שמעוניין מוזמן לקרוא על אינטגרל רימן-ליוביל. הרעיון הכללי הוא שניתן להגדיר אופרטור אינטגרציה $J_a^{\alpha}f(x)$ שלכל פונקציה f מחזיר את האינטגרל ה-α שלה. האופרטור מוגדר באופן הבא:

$$J_a^{\alpha}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt$$

כאשר α שלם אז לפי הנוסחה של קושי נקבל ש-J^{α} הוא לעשות אינטגרל α פעמים.

עכשיו מה שעשינו ל-c שלם עובד לכל c, רק צריך לכתוב J במקום הרכבה של אינטגרלים והמשך הפתרון עובד אותו דבר (כמובן שצריך להחליף את כל העצרות בפונקציות גאמא).

אחרי שנטאטא את כל הדברים הלא אלמנטריים מתחת לשטיח נקבל פתרון ממש קצר ונקי אבל גם קסום וללא מוטבציה.

הפתרון הקצר והנקי:

$$0 \le \int_0^\infty \left(\sum a_i e^{-p_i t}\right)^2 \cdot t^{c-1}\,dt = \sum_{i,j} a_i a_j \int_0^\infty e^{-t(p_i+p_j)} t^{c-1}\,dt$$
$$= \sum_{i,j} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c} \int_0^\infty e^{-t(p_i+p_j)} \left(t(p_i+p_j)\right)^{c-1} \cdot (p_i+p_j)\,dt$$
$$= \sum_{i,j} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c} \int_0^\infty e^{-u} u^{c-1}\,du = \Gamma(c) \cdot \sum_{i,j} \frac{a_i a_j}{(p_i+p_j)^c}$$

ד.
$$\sum_{1\le i,j\le n} \frac{a_i a_j}{1+|i-j|} \ge 0$$

פתרון: נכה צעד אחד רחוק יותר מהסעיף הקודם. לא רק שנכניס e^x אלה אפילו e^{ix}, כלומר אנחנו עוברים למרוכבים!

$$f(x) = \left|\sum_k a_k e^{ikx}\right|^2 = \sum_k a_k e^{ikx} \cdot \sum_k a_k e^{-ikx}$$

אם עושים אינטגרל לביטוי הזה מ-0 עד 2π נקבל $\sum a_k^2$, לא מרגש. בשביל לקבל מכפלה של $a_k a_j$ צריך להזיז את אחת החזקות לפני שעושים אינטגרל. בשביל זה נכפיל את הביטוי שלנו ב-

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+|k|} e^{ikx}$$

המחנה כאן הוא סתם בגלל שזה המחנה שאנחנו רוצים לקבל בסופו של דבר בשאלה המקורית. הדבר המהותי הוא e^{ikx} שכפל בו מזיז חלק מה-e^{ikx}ים ב-f ל-e^0 ואז כשעושים אינטגרל אז יש דברים אחרים שלא מתאפסים.

נכתוב הכל במסודר:

$$f(x)\cdot g(x) = \sum_{1\le k,j\le n} \frac{a_k a_j}{1+|k-j|} + \sum_{k\ne 0} \left(c(k)\right) \cdot (e^{ikx})$$

כאשר $c(k)$ הוא מקדם כלשהו שתלוי ב-k ולא משנה לנו מה הוא. נעשה את האינטגרל שתכננו ונקבל ש-

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot g(x)dx = \sum_{k,j} \frac{a_k a_j}{1+|k-j|} + \sum_{k\ne 0} \frac{c(k)}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx =$$
$$= \sum_{1\le k,j\le n} \frac{a_k a_j}{1+|k-j|}$$

ברור ש-$f(x) \ge 0$ לכל x. נטען שגם $g(x) \ge 0$ וזה ינצח. למעשה, אנחנו גם צריכים להסביר ש-g בכלל מתכנס. בשביל זה נפתח נוסחה מפורשת עבור g.

טענה:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+|k|}e^{ikx}=\int_0^1\frac{1-t^2}{t^2-2tcos(x)+1}dt$$

ברור שהטענה מנצחת כי הפונקציה שעליה עושים אינטגרל באגף ימין חיובית על הקטע $[0,1]$. הרי ברור שהמונה חיובי ובמחנה יש לנו $(t-1)^2+2t(1-\cos(x))$ שזה חיובי.

הוכחת הטענה:

$$\int_0^1\frac{1-t^2}{t^2-2tcos(x)+1}dt=\int_0^1\frac{1-t^2}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})}dt$$

נפתח את הביטוי בתוך האינטגרל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})}&=\frac{1}{1-te^{ix}}\cdot\frac{1}{1-te^{-ix}}\\&=\sum_{k\geq 0}\left(te^{ix}\right)^k\cdot\sum_{k\geq 0}\left(te^{-ix}\right)^k=\sum_{k,j\geq 0}t^{k+j}e^{ix(k-j)}\\&=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}t^{s+2j}\end{aligned}$$

נציב חזרה באינטגרל ונקבל ש-

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1-t^2}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})}dt&=\int_0^1(1-t^2)\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}t^{s+2j}\,dt\\&=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^1(1-t^2)t^{s+2j}dt\\&=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2j+1}-\frac{1}{s+2j+3}\right)\\&=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2j+1}-\frac{1}{s+2j+3}\right)=\sum_{s\in\mathbb{Z}}e^{isx}\cdot\frac{1}{1+s}\end{aligned}$$