אינטגר∫ים

1. מה גדול יותר $1.01^{100.5}$ או e?

2. תהי $x_0, x_1, \dots$ סדרה עולה של שלמים אי-שליליים. נסמן ב-a_j את כמות ה-i-ים עבורם $x_i \le j$, ידוע ש-a_j סופי לכל j. הוכיחו כי לכל m, n שלמים חיוביים

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=0}^{m} a_i \ge (n+1)(m+1)$$

3. הוכיחו את הזהויות:

א. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ב. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m+1}\binom{n}{m} = \frac{1}{n+1}$

ג. $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

ד. $\displaystyle\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\binom{n}{1} + \frac{1}{2n-3}\binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = \frac{(-1)^n 2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

ה. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$

4. נתונים $0 = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n = 0$ ו-$0 \le b_1, \dots, b_n$ מספרים ממשיים ו-$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 2$. ידוע שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים ש-$|a_i - a_{i-1}| \le b_i$. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i-1}) b_i \le 2$$

5. בשורה כתובים שני מספרים: 0 ו-1. בכל שלב מתבצעת אוטומטית הפעולה הבאה: בין כל שני מספרים a ו-b שמופיעים ברצף נכתב המספר $\left(\frac{\sqrt[15]{a} + \sqrt[15]{b}}{2}\right)^{15}$. אחרי שלב אחד יש בשורה 3 מספרים, לאחר שני שלבים 5 מספרים וכו'. כעבור 15 שלבים כתובים בשורה די הרבה מספרים. מצאו את החלק השלם של הסכום שלהם.

6. הוכיחו כי לכל a, b, c חיוביים מתקיים

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+4b} \ge \sum_{cyc} \frac{1}{a+2b+2c}$$

7. לכל x, y ממשיים חיוביים ו-m, n שלמים חיוביים הוכיחו את אי-השוויון

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n}+y^{m+n})+(m+n-1)(x^m y^n+x^n y^m)\geq$$
$$\geq mn(x^{m+n-1}\cdot y+y^{m+n-1}\cdot x)$$

8. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ ממשיים חיוביים שסכומם 1. הראו כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}(a_1+a_2+\ldots+a_{k-1})^2<\frac{1}{3}$$

9. לכל $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ ממשיים חיוביים מתקיים ש-

א. $$\left(\sum_{1\leq i,j\leq n}\min\left(a_i,b_j\right)\right)^2\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}\min\left(a_i,a_j\right)\cdot\sum_{1\leq i,j\leq n}\min\left(b_i,b_j\right)$$

ב. $$0\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}b_i b_j\min\left(a_i,a_j\right)$$

הוכיחו כי בסעיף ב' אי-השיוויון נכון גם כאשר ה-b-ים לאו דווקא חיוביים.

ג. $$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left|b_i-b_j\right|+\left|a_i-a_j\right|\right)\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}\left|b_i-a_j\right|$$

10. עבור $a_1, \dots, a_n$ מספרים ממשיים הוכיחו כי

א. $$\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_i a_j}{i+j-1}\geq 0$$

ב. $$\left(\sum_{i}^{n}a_i\right)^2\leq\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{ij}{i+j-1}a_i a_j$$

ג. לכל $p_1, \dots, p_n$ ו-$c>0$

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_i a_j}{\left(p_i+p_j\right)^c}\geq 0$$

ד. $$\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{a_i a_j}{1+|i-j|}\geq 0$$