פולינומים שלמים

בתרגיל זה כל הפולינומים עם מקדמים שלמים אלא אם כן נאמר אחרת

1. נתון פולינום P כך שלכל n טבעי מתקיים $n \mid P(2^n)$. הראו ש-$P \equiv 0$.

2. יהי $P(x)$ פולינום לא קבוע, הראו כי לא קיימת פונקציה $T: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ עבורה לכל n טבעי כמות הפתרונות בשלמים ל-$T^n(x) = x$ היא $P(n)$.

3. יהי P פולינום אי פריק עם מקדמים רציונליים. נניח ש-r, s שורשים שונים שלו כך ש-$rs = 1$. הוכיחו שהמעלה של P זוגית.

4. יהיו f, g פולינומים כך שיש אינסוף ראשוניים p עבורם קיים מספר שלם m_p המקיים $f(x) \equiv g\left(x + m_p\right) \pmod p$. הראו שיש מספר רציונלי r עבורו $f(x) = g(x + r)$.

5. עבור מספר טבעי n ומספר ראשוני p מצאו את ה-m המינימלי המקיים את הטענה הבאה: לכל פולינום
$$f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$$
(כש-$a_1, \dots, a_n$ שלמים חיוביים) ולכל k טבעי קיים k' טבעי עבורו:
$$v_p\big(f(k)\big) < v_p\big(f(k')\big) \le v_p\big(f(k)\big) + m$$

6. מצאו את כל הפולינומים Q כך שלכל p ראשוני מתקיים $Q(p) \mid 2^p - 2$.

7. א. יהי $n > 1$ ויהיו $a_1, \dots, a_{n+1}$ מספרים שלמים שונים. הראו שיש פולינום P ממעלה לכל היותר n כך שלכל i, j, k שונים:
$$\gcd\Big(P(a_i), P\big(a_j\big)\Big) > 1\,, \gcd\Big(P(a_i), P\big(a_j\big), P(a_k)\Big) = 1$$
ב. הראו שאפשר גם למצוא פולינום ממעלה 2 שמקיים את אותם תנאים.

8. נאמר שמספר n הוא חזקה שלמה אם קיימים מספרים טבעיים a, b כך ש-$b > 1$ ו-$n = a^b$. מצאו את כל הפולינומים P עבורם אם n חזקה שלמה גם $P(n)$ חזקה שלמה.

9. נתון פולינום $f(x) = \pm x^n \pm x^{n-1} \pm \dots \pm 1$, ונתון ש-$(x-1)^m$ מחלק אותו. הראו שאם $m \ge 2^k$ אז $2^k \mid n + 1$.

10. פולינום $P \in \mathbb{Z}[x]$ נקרא חסר ריבועים אם אי אפשר לכתוב אותו בתור $P = Q^2 R$ עבור $Q, R \in \mathbb{Z}[x]$. עבור מספר טבעי n נסמן ב-P_n את קבוצת הפולינומים מהצורה $1 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, כאשר $a_i \in \{0,1\}$ לכל i. הראו שלכל n גדול מספיק לפחות 99% מהפולינומים ב-P_n חסרי ריבועים.

11. הוכיחו כי לכל d מספיק גדול, לפחות 99% מבין הפולינומים $\sum_{0 \le i \le d} \sum_{0 \le j \le d} \pm x^i y^j$ אי פריקים מעל $\mathbb{Z}$.