סדרות שלמות

בתרגיל זה כל המספרים שלמים ובדרך כלל גם חיוביים.

1. נגדיר סדרה $\{a_n\}$ באופן הבא: $a_1 = 2$ ו-$a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$.
הראו כי $a_{n-1}|a_n$, לכל $n \geq 2$.

2. נגדיר סדרה $\{a_n\}$ באופן הבא: $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$. הראו כי לכל $m > 1$ קיים $n > m$ כך ש-$a_m^m|a_n^n$.

3. יהי $n > 1$ שלם. קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ של מספרים שלמים גדולים מ-1, תקרא ***טובה***, אם לכל $i = 1,2, \dots, n$ מתקיים:

$$a_i|\frac{a_1a_2 \dots a_n}{a_i} - 1 .$$

האם יש כמות סופית של קבוצות טובות?

4. יהי $c > 0$. נתונה סדרה $\{a_n\}$ עבורה לכל n מתקיים ש-

$$0 < a_{n+1} - a_n \leq c$$

הראו כי קיימים אינסוף זוגות של אידקסים (i, j) עבורם $a_i|a_j$.

5. נתונות סדרות $\{a_n\}, \{b_n\}$, כך ש-$a_1 = 1, b_1 = 4$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים:

$$a_{n+1} = a_n^{2025} + b_n, b_{n+1} = b_n^{2025} + a_n .$$

הראו כי בשתי הסדרות אין מספר שמתחלק ב-2027.

6. יהי $c > 1$ שלם ויהי P פולינום עם מקדמים שלמים ומקדם חופשי 1. נגדיר סדרה $a_0 = 0$, $a_{n+1} = P(a_n)$. הראו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים n עבורם a_n זר ל-$n + c$.

7. יהיו r,s שלמים חיוביים. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_0=0, a_1=1$,

$$a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}.$$

נסמן ב-Π_n את מכפלת n האיברים הראשונים בסדרה. הראו כי

$$\Pi_k \cdot \Pi_{n-k} | \Pi_n$$

8. יהי k שלם חיובי. נניח כי לכל m קיים איבר F_n של סדרת פיבונצ'י כך ש-$F_n \equiv k \bmod m$. האם k בהכרח איבר של סדר פיבונצ'י?

9. נתבונן בסדרות אינסופיות של שלמים חיוביים המוגדרות באופן הבא: $a_1=1$ ולכל k,n מתקיים ש-

$$a_n | a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+n-1}.$$

לכל m שלם חיובי, מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של a_{2m}.

10. נתונה סדרה $\{a_n\}$ של מספרים שלמים עבורה לכל n,k מתקיים:

$$\frac{a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1}}{k}$$

הוא ריבוע שלם. הראו כי הסדרה חייבת להיות קבועה.