

## אי-שוויונים לרותם

### מחנה נובמבר, תשע"ח

1. בהינתן  $a > b > c > d$ , ובנוסף  $a + d = b + c$ , הוכיחו כי

$$\frac{a+b-c-d}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}$$

2. עבור  $x \geq 1$ , הוכיחו כי  $\ln x \leq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

3. הראו כי  $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{3}$ , לכל  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . הסיקו כי  $\pi > 3.14$ .

4. מספרים  $a, b$  ו- $c$  חיובים. הוכיחו כי

$$\frac{1}{(4a+4b+c)^3} + \frac{1}{(4a+b+4c)^3} + \frac{1}{(a+4b+4c)^3} \leq \frac{1}{243abc}$$

5. מספרים  $x, y$  ו- $z$  ממשיים, ומקיימים  $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ . הוכיחו כי

$$4(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x + y + z - 1)^2 + 8.$$

6. מספרים ממשיים  $a, b$  ו- $c$ , ומקיימים  $ab + ac + bc = 9$ . הוכיחו כי

$$(a+b+c)(a+b+c-abc) \geq (a-b)(b-c)(c-a).$$

7. בהינתן  $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ , הוכיחו כי  $\frac{x+y+z+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ .

8. הראו כי  $d(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}$  היא מטריקה (במילים אחרות,  $d$  מקיים

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$$

9. מספרים  $a, b$  ו- $c$  לא שליליים, ומקיימים  $ab + ac + bc = a + b + c$ . הוכיחו כי

$$ab\sqrt{9a+9b+46c} + ac\sqrt{9a+46b+9c} + bc\sqrt{46a+9b+9c} \geq 24.$$

10. \*\* בהינתן  $x_i \geq 1$ , הוכיחו כי  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ .

בתאבון!