אי שוויונים

תזכורת – אי-שוויונים חשובים

קושי שוורץ:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

ממוצעים:

$$\cdots \ge \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^3}{n}} \ge \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

קושי שוורץ :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

הולדר:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{\alpha} b_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right)^{\alpha+\beta}$$

אי שוויון צ'בישב:

אם $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$, $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$ אז

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \le n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

תרגילים

0. נתונים מספרים ממשיים חיוביים $a_1, a_2 ..., a_n$. הוכיחו ש:

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot ... \cdot(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n})^n.$$

1. (אי-שיוון אסזל) נתונים מספרים $a_1, a_2, ...a_n, A, b_1, b_2, ..., b_n, B$ שמקיימים:

$$A^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B^2 \geq \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

הוכיחו ש: $\left(A^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(B^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq \left(AB - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2$.

2. נתון מספר טבעי $n \geq 4$ ומספרים חיוביים עבורם $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1$. הוכיחו ש:

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + ... + \frac{a_n}{a_n^2+1} \geq \frac{4}{5}\cdot\left(a_1^{\frac{3}{2}} + a_2^{\frac{3}{2}} + ... + a_n^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

3. נתונים מספרים חיוביים כך ש-$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$. עבור כל n מצאו את הערך המינימאלי של

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + ... + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + x_4 + ... + x_n} + ... + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}.$$

4. סדרת מספרים מוגדרת על ידי $a_0 = -1$, ונוסחת הנסיגה $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$, לכל $n \geq 1$. הראו כי $a_n > 0$ לכל $n \geq 1$.

5. בהינתן $n > k > 1$ מצאו את הקבוע הטוב ביותר $T(n,k)$ כזה שלכל אוסף של מספרים ממשיים $x_1, x_2, ..., x_n$ מתקיים אי-שוויון

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \left(x_i - x_j\right)^2 \geq T(n,k)\cdot \sum_{1\leq i<j\leq k} \left(x_i - x_j\right)^2.$$

6. לפולינום $P(x)$ מדרגה $2k$ מקדמים חופשי ומוביל שווים 1, ויש לו שורש ממשי (לפחות אחד). מצאו את המינימום של סכום ריבועי המקדמים (התשובה תלויה ב- k).

7. מספרים חיוביים $a_1,a_2,\ldots$ מקיימים $a_{k+1}\ge\dfrac{ka_k}{a_k^2+k-1}$ לכל k . הראו כי

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\ge n.$$

8. בהינתן $n\ge 2$ מצאו את הקבוע C הגדול ביותר עבורו לכל n מספרים חיוביים $x_1,\ldots,x_n$ מתקיים $\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^4\ge C\cdot\sum\limits_{1\le i<j\le n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)$.

9. מספרים חיוביים $a_2,a_3,\ldots,a_n$ מקיימים $a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_n=1$, כאשר $n\ge 3$. הראו כי

$$\left(1+a_2\right)^2\left(1+a_3\right)^3\cdot\ldots\cdot\left(1+a_n\right)^n>n^n.$$

10. מספרים ממשיים x_1,x_2,y_2,y_2,z_1,z_2 מקיימים:

$$x_1>0,\quad x_2>0,\quad x_1y_1>z_1^2,\quad x_2y_2>z_2^2.$$

הראו כי $\dfrac{1}{x_2y_2-z_2^2}+\dfrac{1}{x_1y_1-z_1^2}\le\dfrac{8}{\left(x_1+x_2\right)\left(y_1+y_2\right)-\left(z_1+z_2\right)^2}$.

11. עבור $a_2,a_3,\ldots,a_n$ חיוביים, הוכיחו כי

$$\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\le\frac{n}{2\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)}\sum_{i<j}a_ia_j\,.$$

12. מספרים חיוביים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מקיימים $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. הוכיחו כי

$$\left(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1\right)\left(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\right)\ge\frac{n}{n+1}.$$

13. עבור $x_1,\ldots,x_n$ חיוביים, הוכיחו כי

$$\left(1+x_1\right)\left(1+x_1+x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\ge\sqrt{\left(n+1\right)^{n+1}x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

14. עבור $a_1,\ldots,a_n>0$, כאשר $n\ge 3$, הוכיחו כי

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\ge\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot n.$$

בתאבון!