תרגיל אי-שוויונים

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1,\quad \alpha_i, x_i \ge 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \ge \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

1. הראו כי $ab+bc+cd+da \le \frac{(a+b+c+d)^2}{4}$.

2. עבור $x>0$ הראו כי $3x^7-7x^3+4\ge 0$.

3. עבור $x>0$ הראו כי $x^7+x^4+x \le \frac{x^9}{3}+x^6+x^3+\frac{2}{3}$.

4. מה יותר גדול: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$ או $\frac{1}{10}$?

5. הראו כי $a^2+b^2+c^2+d^2+1\ge a+b+c+d$.

6. הראו כי $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$, כאשר $a,b,c>0$.

7. בהינתן $0\le a,b,c\le 1$, הוכיחו כי $a+b+c\le 2+abc$.

8. עבור a,b,c חיוביים הוכיחו כי

$$(a+b)(b+c)(a+c)\ge 4\cdot\sqrt[3]{abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right)}.$$

9. מצאו את הערך הגדול ביותר האפשרי עבור הביטוי $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$, כאשר a,b,c,d מספרים ממשיים שכולם שונים מ-0 ומקיימים: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}=6$.

10. הראו כי: (א) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\ge n!$, (ב)* $\left(\frac{5n+7}{12}\right)^n\ge n!$.

11. עבור a,b,c חיוביים, הוכיחו כי $a^4b+b^4c+c^4a\ge abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

12. עבור a,b,c חיוביים, הוכיחו כי $\frac{a}{a^2+b^2+2}+\frac{b}{b^2+c^2+2}+\frac{c}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$.

13*. מספרים חיוביים $a_2,a_3,\ldots,a_n$ מקיימים $a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_n=1$, כאשר $n\ge 3$. הראו כי

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdot\ldots\cdot(1+a_n)^n > n^n.$$

בתאבון!