

## אי-שוויונים

1. יהיו  $a_1, \dots, a_n$  חיוביים. הוכיחו כי

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq \min \left( a_1 + \frac{1}{a_2}, a_2 + \frac{1}{a_3}, \dots, a_n + \frac{1}{a_1} \right)$$

2. יהיו  $a_n, b_n$  סדרות של מספרים חיוביים המקיימות

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2b_n} \qquad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2a_n}$$

הוכיחו כי  $\max(a_{2023}, b_{2023}) > 44$ .

3. נתון עץ עם  $n$  קודקודים. בקודקודי העץ רשומים המספרים  $x_1, \dots, x_n$ . על כל קשת של העץ רשומה מכפלת המספרים בקצוות הקשת. נסמן ב- $S$  את סכום המספרים על קשתות הגרף. הוכיחו כי

$$\sqrt{n-1}(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq 2S$$

4. יהא  $n > 3$ . נתונים מספרים חיוביים  $x_1, x_2, \dots, x_n$  שמכפלתם 1. הוכיחו כי

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2} + \frac{1}{1+x_2+x_2x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1$$

5. יהיו  $x_1, \dots, x_n$  ממשיים שסכומם 0 וסכום ריבועיהם 1. הוכיחו כי

$$\min_i(x_i) \cdot \max_i(x_i) \leq -\frac{1}{n}$$

6. נתונים מספרים ממשיים חיוביים  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  המקיימים

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n = 1$$

הוכיחו כי

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| \leq 2 - \min_i \left( \frac{a_i}{b_i} \right) - \min_i \left( \frac{b_i}{a_i} \right)$$

7. נתונה סדרה אינסופית של מספרים חיוביים  $a_1, a_2, \dots$  המקיימת

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_{n+1}^2}{n+1}}$$

הוכיחו כי הסדרה קבועה.

8. יהיו  $-1 \leq x_1, \dots, x_{2n} \leq 1$ . מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (j-i-n)x_i x_j$$

9. נתונים  $x_1, \dots, x_{100} \geq 0$  המקיימים  $x_1^2 + \dots + x_{100}^2 = 1$ . הוכיחו כי

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_3 + \dots + x_{99}^2 \cdot x_{100} + x_{100}^2 \cdot x_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$