

מחנה אביב 18.05.2022

1. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $ab + ac + bc \neq 0$. הוכיחו כי:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2 - bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b(a+c)}{a^2 - ac + c^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2 - ab + b^2}} \geq 2 \quad (\text{א})$$

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2 + \frac{5}{2}bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b(a+c)}{a^2 + \frac{5}{2}ac + c^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2 + \frac{5}{2}ab + b^2}} \geq 2 \quad (\text{ב})$$

2. יהי a, b מספרים חיוביים.

$$\frac{a}{b+3} + \frac{b}{a+2} + \frac{4}{3a+2b} \geq \frac{5}{4} \quad \text{הוכיחו כי:}$$

3. יהי a, b, c, d מספרים חיוביים. הוכיחו כי:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2} \geq 1$$

4. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $a + b + c = 3$. הוכיחו כי:

$$\frac{a}{1+3b^2} + \frac{b}{1+3c^2} + \frac{c}{1+3a^2} \geq \frac{3}{4}$$

5. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $ab + ac + bc \neq 0$. הוכיחו כי:

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{(a+b)(a+c)} + \frac{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}}{(b+c)(b+a)} + \frac{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{1}{2}$$

6. יהי $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ אורכי צלעות של משולש. הוכיחו כי:

$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 3 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

7. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $ab + ac + bc \neq 0$.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} \geq 4 + \frac{2(a-2b-2c)^2}{(a+b+c)^2} \quad \text{הוכיחו כי:}$$

8. יהי a, b, c מספרים לא שליליים עבורם $ab + ac + bc = 3$.

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{4(a+b+c) + 6} \quad \text{הוכיחו כי:}$$