18.06.2024

אי שוויון תמורות

1. יהי $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ ו- τ תמורה של 1,2,...,n.

הוכיחו כי: א) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\tau(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$;

ב) $n\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leq n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

2. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:
$a(a-b)\sqrt{b^2+c^2} + b(b-c)\sqrt{c^2+a^2} + c(c-a)\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$.

3. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל- 3. הוכיחו כי:
$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$.

4. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל- 1.
הוכיחו כי: $a^3b + b^3c + c^3a + 3abc \leq \frac{4}{27}$.

5. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים, אשר סכום ריבועיהם שווה ל-3.
הוכיחו כי: א) $a^2b + b^2c + c^2a \leq abc + 2$;

ב) $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \leq 3$.

6. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:
$(a+b+c)^5 \geq 27(ab+ac+bc)(a^2b+b^2c+c^2a)$.

7. בכל משולש הוכיחו כי: $\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3(m_a+m_b+m_c)}{a+b+c}$.

8. יהי a, b, c ו- d מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל- 4.
הוכיחו כי: $\frac{1}{8+a^2} + \frac{1}{8+b^2} + \frac{1}{8+c^2} + \frac{1}{8+d^2} \leq \frac{4}{9}$.

9. יהי a, b, c ו- d מספרים חיוביים, $abcd = 1$ ו-
$a^2+b^2+c^2+d^2 = \sqrt{34}$. הוכיחו כי: $ab+bc+cd+da \leq 5$.