

30.08.2023

אומדנות נכונים

1. יהי a, b, c מספרים לא שליליים ו- $ab + ac + bc = 1$. הוכיחו כי:

$$\frac{1 + \sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{1 + \sqrt{ca}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{1 + \sqrt{ab}}{c + \sqrt{ab}} \geq 4 \quad (\text{א})$$

$$\frac{1 + a\sqrt{bc}}{a + \sqrt{bc}} + \frac{1 + b\sqrt{ca}}{b + \sqrt{ca}} + \frac{1 + c\sqrt{ab}}{c + \sqrt{ab}} \geq 1 + \frac{4}{a + b + c} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{1}{a + \sqrt{bc}} + \frac{1}{b + \sqrt{ca}} + \frac{1}{c + \sqrt{ab}} + 2 \geq 2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{bc}} + \frac{1}{1 + \sqrt{ca}} + \frac{1}{1 + \sqrt{ab}} \right) \quad (\text{ג})$$

2. יהי a, b, c מספרים חיוביים ו- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

$$\left(\frac{a}{1 - bc} \right)^2 + \left(\frac{b}{1 - ca} \right)^2 + \left(\frac{c}{1 - ab} \right)^2 \leq \frac{9}{4} \quad \text{הוכיחו כי:}$$

3. יהי a, b, c מספרים לא שליליים ו- $ab + ac + bc = 3$. הוכיחו כי:

$$\frac{\sqrt{a+3} - a}{a + \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b+3} - b}{b + \sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c+3} - c}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{a + b + c + 3}{a + b + c + 1}$$

4. יהי a, b, c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:

$$(a + bc)^2 + (b + ca)^2 + (c + ab)^2 \geq \sqrt{2}(a + b)(a + c)(b + c)$$

5. יהי a, b, c מספרים לא שליליים. הוכיחו כי:

$$(a^2 + bc + ca)(b^2 + ca + ab)(c^2 + ab + bc) \geq (a^2b + b^2c + c^2a) (a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a})^2$$