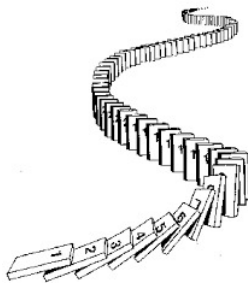


אינדוקציה (רותם)



1. נתון לוח משבצות אינסופי, מסומנות בלוח n משבצות הוכיחו כי ניתן לצבוע את n המשבצות המסומנות בצבעים אדום וכחול, כך שבכל שורה ובכל עמודה הערך המוחלט של הפרש כמות המשבצות בכל צבע יהיה 1 לכל היותר.
2. נתונים שלמים חיוביים n, k . בחברה מסויימת יש מדיניות כיצד למכור ספרים. כל לקוח רשאי לשכנע עד 2 אנשים לקנות ספר לאחר שהוא קונה כזה. שכנוע של לקוח שכבר שוכנע קודם לכן לא נחשב. כל אחד מהלקוחות החדשים הללו יכול לשכנע שני אחרים וכך הלאה. אם לקוח מסויימ שכנע שני לקוחות וכל אחד מהם גורם לפחות k אנשים לקנות ספר (באופן ישיר או עקיף), אז אותו לקוח זוכה במחשב בחינם. הוכיחו כי אם n אנשים בסך הכל קנו ספרים אז לכל היותר $\frac{n}{k+2}$ מהם קיבלו מחשב בחינם.
3. נתון עץ T בעל n צלעות. הוכיחו כי ניתן לחלק את קוביית היחידה ה- n מימדית לאיחוד זר בצלעות של תתי גרפים שאיזומורפיים ל- T . (קוביית היחידה ה- n מימדית היא גרף שלכל קודקוד שלו ניתן להתאים מחרוזת באורך n של $\{0, 1\}$ ושני קודקודים מחוברים בקשת אמ"מ המחרוזות המתאימות נבדלות במקום אחד בדיוק).
4. נתונות n משקולות במשקלים $1, 2, \dots, 2^{n-1}$. ערך של חפץ נקבע על פי כמות הדרכים שניתן לשקול את החפץ על מאזני כף כך שיתקבל שוויון. מה ערכו של החפץ הערכי ביותר?
5. נתון גרף עם $2n$ קודקודים ו- $n^2 + 1$ קשתות. מה כמות המשולשים המינימלית האפשרית בגרף?
6. כל צלע של הגרף המלא עם $n + 2$ קודקודים נצבעה בצבע מסויים כך שכל צבע מופיע לכל היותר n פעמים. הוכיחו שקיים בגרף משולש שכל צלעותיו בצבעים שונים.
7. הקשתות של גרף שלם מכוון נצבעו בשני צבעים. הוכיחו כי ניתן למצוא קודקוד u כך שלכל קודקוד אחר v קיים מסלול מונוכרומטי מ- u ל- v .
8. נתון גרף מישורי G . הוכיחו כי ניתן לכוון את הקשתות של G (לבחור כיוון לכל קשת), כך שדרגת הכניסה של כל קודקוד לא תעלה על 3.
9. נתון גרף פשוט וקשיר בעל n קודקודים. נתון שהדרגה של כל קודקוד בגרף היא לפחות k . הוכיחו כי ניתן לצבוע את הצלעות הגרף ב- $n - k$ צבעים כך שבין כל שני קודקודים יש מסלול שכל הצלעות בו בצבעים שונים.
10. בתחרות קרב רב משתתפים 2^n ספורטאים המתחרים ב- n מקצועות. לכל ספורטאי יש דירוג בכל אחד מהמקצועות, לאף שני ספורטאים אין דירוג זהה באף אחד מהמקצועות. התחרות נערכת באופן הבא: ראשית נבחר הסדר שבו יתקיימו n תתי התחרויות (תחרות בכל מקצוע). בסיבוב ה- i , מבין המתחרים שעברו לסיבוב ה- i , מחצית המתחרים עם הדירוג הגבוהה במקצוע ה- i עוברת לסיבוב ה- $i + 1$. מתחרה יקרה בעל פוטנציאל אם ניתן לבחור את סדר המקצועות כך שהוא יזכה בתחרות. מה היא כמות המתחרים בעלי הפוטנציאל הגדולה ביותר האפשרית?
11. איילה וברוזה משחקים משחק בתורות. לפני תחילת המשחק, איילה לוקחת מטבעות עם ערכים $1, 2, \dots, n$ ומחלקת אותם לערמות איך שהיא רוצה. לאחר מכן בכל תור השחקן שתורו לוקח את המטבע העליון או התחתון מאחת הערמות, איילה עושה את המהלך הראשון (היא עושה מהלך ישירות אחריי שהיא סידרה את המטבעות). המשחק נגמר כאשר כל המטבעות נלקחו. המטרה של כל שחקן היא להשיג ערך של מטבעות כמה שיותר גדול. מה הערך שאיילה הולכת להשיג כתלות ב- n ?