


אינדוקציה

1. נתון מצולע קמור. הצלעות שלו צבועות בשני צבעים, ככה שמבחוץ הן ורודות, ומבפנים, כחולות. ציירו חלק מהאלכסונים שלו (אף שלשה אלכסונים לא נחתכים בנקודה), וכל אלכסון צבוע מצד אחד בכחול, ומצד שני בורוד. הוכיחו שיש מצולע קמור שצבוע מבפנים בכחול ומבחוץ בורוד, ושבתוכו לא עוברים אלכסונים אחרים.


2. הראו שלכל מספר טבעי k קיים מספר טבעי שבייצוגו העשרוני מורכב רק מהספרות 1 ו-2, אשר גם מתחלק ב- 2^k .

3. אתר "גולאג טרנסלייט" מאפשר לתרגם בין שפות, מתוך מאגר של N שפות. אם גולאג יודע לתרגם משפה א' לשפה ב', ומשפה ב' לשפה ג', אז גולאג יודע לתרגם משפה א' לשפה ג'. ניתן לבקש מגולאג לתרגם משפה אחת לאחרת. אם הוא יודע לתרגם, הוא יתרגם, ואחרת יחזיר שגיאה. כל בקשת תרגום בגולאג עולה 10 רובל. נתון שיש שפה אחת לפחות שגולאג יודע לתרגם ממנה לכל שפה אחרת. מה כמות הרובלים המינימאלית שצריך לשלם בשביל למצוא אחת כזו בוודאות? (כתלות ב- N)

4. הסדרה a_0, a_1, a_2, \dots מוגדרת כך: $a_0 = 1$, ואז $a_{n+1} = a_n - 2$ אם הוא מספר חיובי שעוד לא הופיע בסדרה. אחרת, $a_{n+1} = a_n + 3$. הוכיחו כי לכל k , אם a_k מספר ריבועי, אז $a_k > a_{k-1}$.

5. לקחו משולש שווה צלעות עם אורך צלע 2^n וחילקו אותו ל- 4^n משולשים שווים צלעות עם אורך צלע 1. מחקו משולש קטן בקודקוד של הצורה הגדולה. הוכיחו שניתן לרצף את הצורה שנותרה עם טרפזים שמורכבים מ-3 משולשים שווים צלעות קטנים. (כמו בתמונה הקטנה משמאל) 

6. נתון שדה ריבועי, ואיפשהו בתוכו עומד עז. על כל קודקוד של הריבוע עומד רועה צאן. העז הוא חכם, ועל כן, כל פעם שרועה צאן כלשהו מוחא כף, העז רץ בדיוק חצי מהדרך אליו, ואז עוצר. במקום אחר בתוך השדה מצוייר עיגול גיר קטן. הוכיחו כי רועי הצאן יכולים (בעזרת עבודת צוות) לגרום לעז לעמוד בתוך העיגול.

7. לוח משבצות מלבני עם צלעות אי-זוגיות צבוע צביעת שחמט (בשחור ולבן לסירוגין) כך שפניו הריבוע שחורות. הורידו שתי משבצות שחורות, ומשבצת אחת לבנה. הוכיחו כי ניתן לרצף את הלוח עם דומינו. (כמו בתמונה הקטנה משמאל) 

8. במדינה "פיסות אדמה מעל מים" יש N איים. למדינה יש 3 חברות שמסיעות אנשים באוניות בין איים, ולכל זוג ערים, בדיוק אחת מהחברות מציעות אוניה שיודעת להגיע בין אחת לשנייה. יום אחד המדינה גילתה קשיים קציביים, והחליטה לסגור שניים מתוך שלשת חברות ההסעות. הוכיחו כי הם יכולים לבחור את החברות שהם סוגרים, כך שאחרי הסגירה תהיה קבוצה כלשהי עם לפחות $N/2$ איים, שעדיין יהיה ניתן להגיע מכל אחת לכל אחת אחרת. (אף שבטח תדרש לכך יותר מאוניה אחת)

9. נתון מצולע קמור. ציירו חלק מהאלכסונים במצולע, כך שאף שניים לא נחתכים, שמחלקים את המצולע למשולשים. מתברר שכל המשולשים הם חדי זווית. הראו שניתן לעשות כזה דבר לכל היותר בדרך אחת.