חימום פונקציות יוצרות – פתרונות

חימום 1. חשבו את הפונקצייה היוצרת של הסדרות הבאות.

א. $a_n = 1$.

ב. $a_n = q^n$ עבור q ממשי.

ג. $a = (1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots)$ (החל מהאיבר השלישי, הסדרה מתאפסת).

ד. $a_n = \binom{m}{n}$, עבור m טבעי כלשהו. מה קורה כש-m שלילי? וממשי כללי?

פתרון. א ו-ב הם פשוט סכום של סדרה הנדסית.

$$\text{א.}\quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{ב.}\quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$$

ג. נשים לב ש-$a_n = 0$ לכל $n \geq 3$. אז

$$F(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + 0 = 1 + 2x + 3x^2$$

שימו לב שהפונקציה היוצרת היא פולינום – כלומר הסכום הוא סופי. זה נכון באופן כללי – סדרה היא סופית אם ורק אם הפונקציה היוצרת שלה היא פולינום.

ד. נתחיל מ-m טבעי. נשים לב ש-$\binom{m}{n} = 0$ לכל $n > m$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$$

כעת, ננסה להכליל את התוצאה ל-α ממשי כללי. נזכיר שמתקיים

$$\binom{\alpha}{n} \coloneqq \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

והיינו שמחים להוכיח שהפונקציה היוצרת של $\binom{\alpha}{n}$ היא $(1+x)^\alpha$.

נסמן $f(x) = (1+x)^\alpha$, מתקיים

$$f(0) = 1^\alpha = 1$$
$$f'(0) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}|_{x=0} = \alpha$$
$$f''(0) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}|_{x=0} = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$

וכעת, נחשב את טור הטיילור של f

$$(1+x)^\alpha = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

הערה: עלינו להיות זהירים יותר בהצבות הללו. אשאיר את הפרטים לקורא העקשן, אשר מרגיש מספיק בטוח ביכולות החדו"א שלו.

הערה: הסדרה הנוצרת ע"י $\frac{1}{(1-x)^m}$ (עבור m טבעי) מאוד שימושית, ויוצאת יפה

$$\binom{-m}{n} = \frac{-m(-m-1)\cdots(-m-n+2)(-m-n+1)}{n!}$$
$$= (-1)^n \frac{m(m+1)\cdots(m+n-2)(m+n-1)}{n!}$$
$$= (-1)^n \binom{m+n-1}{n} = (-1)^n \binom{m+n-1}{m-1}$$

כלומר, הסדרה הנוצרת ע"י $\frac{1}{(1-x)^m}$ היא $a_n = \binom{m+n-1}{m-1}$.

חימום 2. נניח ש-$F(x), G(x)$ הן הפונקציות היוצרות של a_n, b_n בהתאמה. הסבירו אילו סדרות נוצרות ע"י הפונקציות הבאות:

א. $F+G$	ב. $c\cdot F$, c ממשי	ג. $x^m F(x)$, m טבעי
ד. $F(c\cdot x)$, c ממשי	ה. $F(x^m)$, m טבעי	ו. $F'(x)$ – נגזרת של F
ז. $xF'(x)$	ח. $F\cdot G$	ט. $\frac{1}{1-x}\cdot F(x)$

פתרון. כתבתי את התשובות, אני משאיר לקורא את הפיתוח.

א. $a_n + b_n$

ב. $c\cdot a_n$

ג. $(\overbrace{0,\dots,0}^{m}, a_0, a_1, a_2, \dots) = \begin{cases} a_{n-m} & n \ge m \\ 0 & n < m \end{cases}$

ד. $c^n a_n$

ה. $(a_0, \overbrace{0,\dots,0}^{m-1}, a_1, \overbrace{0,\dots,0}^{m-1}, a_2, \dots)$

ו. $(n+1)a_{n+1}$

ז. na_n

ח. $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

ט. $\sum_{k=0}^{n} a_k$

חימום 3. מצאו את המקדם של x^{24} בטור החזקות של הפונקצייה $\frac{1+x^3+x^{12}}{(1-x)^7}$.

פתרון. כפי שראינו בהערה לאחר חימום.1.ד, מתקיים

$$\frac{1+x^3+x^{12}}{(1-x)^7} = (1+x^3+x^{12})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6}{6}x^n$$

כעת, מעניין אותנו המקדם של x^{24}, כלומר המקדמים של x^{24}, x^{21}, x^{12} בטור. אז המקדם של x^{24} הוא

$$\binom{30}{6}+\binom{27}{6}+\binom{18}{6} = 908349$$

חימום 4. מצאו ביטוי סגור לסכום $s_2(n) = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

פתרון. נסמן את הפונקציה היוצרת של $s_2(n)$ ב-F.
אם נסמן ב-G את הפונקציה היוצרת של n^2, אז לפי חימום.2.ט $F(x) = \frac{G(x)}{1-x}$.
אם נסמן ב-H את הפונקציה היוצרת של n, אז לפי חימום.2.ז $G(x) = xH'(x)$.
אם נסמן ב-I את הפונקציה היוצרת של 1, אז לפי חימום.2.ז $H(x) = xI'(x)$.

כעת, $I(x) = \frac{1}{1-x}$, אז

$$H(x) = xI'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$
$$G(x) = xH'(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$
$$F(x) = \frac{G(x)}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = x\cdot\frac{1}{(1-x)^4} + x^2\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$$

כפי שראינו בהערה לאחר חימום.1.ד, הסדרה הנוצרת ע"י $\frac{1}{(1-x)^4}$ היא $a_n = \binom{n+3}{3}$.
לכן, F יוצרת את

$$a_{n-1}+a_{n-2} = \binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

כרצוי.

שאלות פונקציות יוצרות – פתרונות

1. נתונה סדרה המקיימת $f_0 = 0, f_1 = 1$ וכן $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, לכל $n \geq 2$.
מצאו נוסחה סגורה לסדרה.

פתרון. נסמן ב-F את הפונקציה היוצרת של f_n. הפונקציה היוצרת של f_{n-1} היא $xF(x)$ ושל f_{n-2} היא $x^2F(x)$. מתקיים $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ עבור $n \geq 2$, לכן המקדמים של x^n ב-$F(x)$ וב-$xF(x) + x^2F(x)$ מסכימים זה עם זה.

צריך להבין מה עם המקדם של x^0 ושל x^1. $f_0 = 0$, לכן גם המקדמים של x^0 מסכימים, אבל $f_1 = 1$, לכן נצטרך להוסיף ל-$xF(x) + x^2F(x)$ מחובר של x.
כלומר:

$$F(x) = xF(x) + x^2F(x) + x$$

ניתן היה להבין זאת גם ע"י כתיבה מפורשת של הסכום.

$$\begin{aligned}
F(x) \ &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \cdots \\
xF(x) &= \qquad x^2 \ \ + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \cdots \\
x^2F(x) &= \qquad\qquad\quad x^3 + \ \ x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \cdots
\end{aligned}$$

כפי שרואים, עבור $n \geq 2$ המקדם של x^n ב-$F(x)$ וב-$xF(x) + x^2F(x)$ מסכימים זה עם זה, וההבדל ביניהם הוא במקדם של x.
כעת, נותר לפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}
&F(x) = xF(x) + x^2F(x) + x \\
&(1 - x - x^2)F(x) = x \\
&F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

נסמן $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ו-$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, נקבל

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(1 - \phi x)(1 - \Phi x)} \\
&= \frac{1}{\Phi - \phi}\left(\frac{1}{1 - \Phi x} - \frac{1}{1 - \phi x}\right)
\end{aligned}$$

הסדרה הנוצרת ע"י $\frac{1}{1-\Phi x}$ היא Φ^n, הסדרה הנוצרת ע"י $\frac{1}{1-\phi x}$ היא ϕ^n ו-$\Phi - \phi = \sqrt{5}$. לכן

$$f_n = \frac{\Phi^n - \phi^n}{\sqrt{5}}$$

2. חשבו את הסכומים הבאים:

א. $\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k$

ב. $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot 2^k$

פתרון. א. ראשית, נשים לב ש-

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

לכן, מספיק לנו לחשב את $\sum (k+1) \cdot 2^k$. נחליף את 2 ב-x כללי, ונקבל

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} x^{k+1}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\right) = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

כלומר

$$f(2) = \frac{(n+1)2^{n+2} - (n+2)2^{n+1} + 1}{(2-1)^2} = n \cdot 2^{n+1} + 1$$
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k = n \cdot 2^{n+1} + 1 - (2^{n+1} - 1)$$
$$= (n-1)2^{n+1} + 2$$

ב. נפעל בדרך דומה ל-א.

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{k+2}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{n}x^{k+2}\right)$$
$$=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^{n+3}-1}{x-1}\right)$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)x^{n+3}-2(n+1)(n+3)x^{n+2}+(n+2)(n+3)x^{n+1}-2}{(x-1)^3}$$

כלומר

$$\begin{aligned}g(2)&=2^{n+1}\big(4(n+1)(n+2)-4(n+1)(n+3)+(n+2)(n+3)\big)-2\\&=(n^2+n+2)2^{n+1}-2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot 2^k&=\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2)2^k-3\sum_{k=0}^{n}k\cdot 2^k-2\sum_{k=0}^{n}2^k\\&=(n^2+n+2)2^{n+1}-2-3\big((n-1)2^{n+1}+2\big)-2(2^{n+1}-1)\\&=(n^2-2n+3)2^{n+1}-6\end{aligned}$$

כרצוי.

3. נגדיר סדרה ע"י $C_0 = 1$ וכן, לכל n,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

מצאו נוסחה סגורה ל-C_n.   **בונוס:** תעשו את זה קומבינטורית.

פתרון. נסמן ב-F את הפונקציה היוצרת של C_n. לפי חימום.2.ח, הפונקציה היוצרת של קונבולוציה היא מכפלת הפונקציות היוצרות. לכן,

$$\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

נוצרת ע"י $F \cdot F$. C_{n+1} נוצרת ע"י $\frac{F(x)-1}{x}$. לכן, מתקיים

$$F(x)^2 = \frac{F(x)-1}{x}$$

$$xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0$$

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

הפונקציה $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-4x}$ יוצרת את הסדרה

$$a_n = (-4)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} = (-4)^n \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

$$= \frac{(-2)^n}{n!} \cdot 1(1-2)(1-4)\cdots(1-2n+2)$$

$$= \frac{(-2)^n}{n!} \cdot (-1)(-3)(-5)\cdots(-2n+3)$$

$$= -\frac{2^n}{n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) = -\frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(2n-2)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}$$

$$= -\frac{2 \cdot (2n-2)!}{n! \cdot (n-1)!}$$

עבור $n \geq 1$ ו-$a_0 = 1$. כעת, נשים לב ש-C_n חיובית אבל a_n שלילית ל-$n \geq 1$, לכן נבחר $F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. אז F יוצרת את $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}$ (חלוקה ב-x מזיזה שמאלה את הסדרה), לכן $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

הערה: להרחבה באופי הקומבינטורי של C_n, קראו בויקיפדיה על מספרי קטלן.

4. להיפו יש מטבעות של שקל, שני שקלים, חמישה שקלים, 10 שקלים (כמות בלתי מוגבלת מכל מטבע). בכמה דרכים יכול היפו להרכיב סכום של n שקלים? אפשר גם רק למצוא פונקצייה יוצרת (לא חייבים לחשב במפורש).

פתרון. נתבונן בפונקציות

$$F_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
$$F_2(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$
$$F_5(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$$
$$F_{10}(x) = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + \cdots = \frac{1}{1-x^{10}}$$
$$F(x) = F_1(x)F_2(x)F_5(x)F_{10}(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^{10}}$$

נשים לב שלכתוב $n = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10$ שקול לכתוב

$$x^n = x^{a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 5 + d \cdot 10} = x^{a \cdot 1} x^{b \cdot 2} x^{c \cdot 5} x^{d \cdot 10}$$

כלומר, מספר הדרכים להרכיב את n ממטבעות של 1,2,5,10 שווה למקדם של x^n ב-$F(x)$. את המקדם הזה קל לחשב, זה לא מאוד מעניין וקצת ארוך, אז נדלג על החישוב פה.

הערה: הטריק של להמיר בין "מספר הדרכים להרכיב מספר בדרך מסויימת" לפונקציה יוצרת, הוא שימושי מאוד ומופיע בהרבה שאלות. בתרגיל הזה יש עוד שאלות רבות שנפתרות בעזרתו, וזה טריק שמאוד כדאי לזכור.

5. מצאו את כמות תתי הקבוצות של $\{1,2,\dots,1000\}$ שסכומן מתחלק ב-5.

פתרון. כמו בשאלה הקודמת, המקדם של x^n בפונקציה

$$F(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{1000})$$

שווה למספר הדרכים בהן ניתן לרשום את n בתור סכום של מספרים בקבוצה $\{1,2,\dots,1000\}$. לכן, אם נרשום[1]

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

מספר תתי הקבוצות שנסכמות ל-5 יהיה a_5, מספר תתי הקבוצות שנסכמות ל-10 יהיה a_{10} והמספר שאנחנו רוצים לחשב הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{5n}$$

כעת, נשתמש בטריק מגניב ושימושי – נציב שורשי יחידה בפונקציה היוצרת. ספיציפית, נציב $\zeta_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ בפונקציה (שורש יחידה מסדר 5). המוטיב של להציב שורשי יחידה בפונקציות יוצרות, הוא מאוד שימושי, וחוזר על עצמו בשאלות רבות.

נשים לב שעבור n שאינו מתחלק ב-5,

$$\{1,\zeta_5,\zeta_5^2,\zeta_5^3,\zeta_5^4\} = \{1^n,(\zeta_5)^n,(\zeta_5^2)^n,(\zeta_5^3)^n,(\zeta_5^4)^n\}$$

כלומר, הפעולה של להעלות בחזקת n עושה תמורה על השורשים. אז

$$\begin{aligned}
&F(1) + F(\zeta_5) + F(\zeta_5^2) + F(\zeta_5^3) + F(\zeta_5^4) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta_5)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta_5^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta_5^3)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\zeta_5^4)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(1 + (\zeta_5)^n + (\zeta_5^2)^n + (\zeta_5^3)^n + (\zeta_5^4)^n\right)
\end{aligned}$$

---

[1] שימו לב ש-F היא פולינום, לכן $a_n = 0$ החל ממקום מסויים.

$$= \sum_{5\nmid n} a_n(1+\zeta_5+\zeta_5^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4) + \sum_{5|n} a_n(1+1+1+1+1)$$

$$= \sum_{5\nmid n}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{5n} \cdot 5 = 5\sum_{n=0}^{\infty} a_{5n}$$

וקיבלנו פי 5 מהסכום שאנחנו רוצים לחשב!

נותר לנו לחשב את $F(1)+F(\zeta_5)+F(\zeta_5^2)+F(\zeta_5^3)+F(\zeta_5^4)$. מהצבה ישירה, רואים ש-$F(1)=2^{1000}$. נחשב את $F(\zeta_5)$.

$$\begin{aligned} F(\zeta_5) = {} & (1+\zeta_5)\quad(1+\zeta_5^2)\quad(1+\zeta_5^3)\quad(1+\zeta_5^4)\quad(1+\zeta_5^5) \\ & (1+\zeta_5^6)\quad(1+\zeta_5^7)\quad(1+\zeta_5^8)\quad(1+\zeta_5^9)\quad(1+\zeta_5^{10}) \\ & \vdots \\ & (1+\zeta_5^{996})(1+\zeta_5^{997})(1+\zeta_5^{998})(1+\zeta_5^{999})(1+\zeta_5^{1000}) \end{aligned}$$

נשים לב, שמכיוון ש-$\zeta_5^5 = 1$, כל הגורמים שנמצאים זה מעל זה – שווים זה לזה. לכן קיבלנו

$$F(\zeta_5) = [(1+\zeta_5)(1+\zeta_5^2)(1+\zeta_5^3)(1+\zeta_5^4)(1+1)]^{200} = 2^{200}$$

ומכיוון שלהעלות בחזקה עושה תמורה על השורשים, נקבל שגם

$$F(\zeta_5^2) = F(\zeta_5^3) = F(\zeta_5^4) = 2^{200}$$

לכן,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{5n} = \frac{F(1)+F(\zeta_5)+F(\zeta_5^2)+F(\zeta_5^3)+F(\zeta_5^4)}{5} = \frac{2^{1000}+4\cdot 2^{200}}{5}$$

תרגיל: הסבירו מדוע $(1+\zeta_5)(1+\zeta_5^2)(1+\zeta_5^3)(1+\zeta_5^4)(1+1) = 2$.

6. האם אפשר למספר פאות של שתי קוביות הוגנות, באופן שונה מקוביות משחק, כך שסכום הקוביות יתפלג כמו סכום של קוביות משחק רגילות?

פתרון. התפלגות של סכום של קוביות הוגנות נובעת ממספר הדרכים להשיג כל סכום (ההסתברות לקבל את הסכום הזה תהיה מספר הדרכים לקבל אותו חלקי 36). אנחנו כבר יודעים כיצד למצוא את מספר הדרכים לקבל כל סכום – מספר הדרכים לקבל את n שווה למקדם של x^n בפונקציה

$$F(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

נרצה למצוא פירוק אחר ל-F, כך שהפירוק יתן לנו שתי קוביות חדשות. נתחיל מלפרק את F יותר:

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= x(1 + x^3)(1 + x + x^2) \\ &= x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2) \end{aligned}$$
$$F(x) = x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)$$

כעת, נרצה להרכיב מהגורמים הללו פירוק $F(x) = G(x) \cdot H(x)$, כך ש-

$$G(1) = H(1) = 6$$

ואז המונומים של G, H יהיו המספרים על פאות הקוביה. נשים לב ש-$1 - x + x^2$ מקבל את הערך 1 ב-1, לכן "נזיז" אותו לגורם השני. כלומר,

$$\begin{aligned} G(x) &= x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2) \\ &= x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \\ H(x) &= x(1 + x)(1 + x + x^2) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x \end{aligned}$$

כלומר, המספרים הרשומים על הקוביה הראשונה הם 1,3,4,5,6,8 ועל השנייה 1,2,2,3,3,4.

7. תהא a_n סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נתון שלכל m קיימים מספרים טבעיים יחידים (לאו דווקא שונים) i, j, k כך ש-$a_i + 2a_j + 4a_k = m$. חשבו את a_{5784}.

פתרון. כמו בשאלות הקודמות, מספר הדרכים להציג מספר בצורה $a_i + 2a_j + 4a_k$ הוא הסדרה הנוצרת ע"י הפונקציה

$$(x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + \cdots)(x^{2a_0} + x^{2a_1} + x^{2a_2} + x^{2a_3} + \cdots)$$
$$(x^{4a_0} + x^{4a_1} + x^{4a_2} + x^{4a_3} + \cdots)$$

מצד שני, כל מספר טבעי ניתן להצגה בצורה יחידה, אז הסדרה הנוצרת היא הסדרה הקבועה 1, כלומר הפונקציה היוצרת שלה היא $\frac{1}{1-x}$. נסמן

$$F(x) = x^{a_0} + x^{a_1} + x^{a_2} + x^{a_3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a_n}$$

ונקבל

$$F(x)F(x^2)F(x^4) = \frac{1}{1-x}$$

קיבלנו משוואה פונקציונלית על F. נחליף את x ב-x^2 ונקבל

$$F(x^2)F(x^4)F(x^8) = \frac{1}{1-x^2}$$

נחלק במשוואה המקורית, ונקבל

$$\frac{F(x^8)}{F(x)} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow F(x) = (1+x)F(x^8)$$

נפעיל את המשוואה האחרונה על עצמה הרבה פעמים, נקבל

$$\begin{aligned} F(x) &= (1+x)F(x^8) = (1+x)(1+x^8)F(x^{64}) \\ &= (1+x)(1+x^8)(1+x^{64})F(x^{512}) = \cdots \\ &= \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + x^{8^k}\right) \cdot F(x^{\infty}) \end{aligned}$$

הביטוי $F(x^\infty) = 1$. ניתן לחשוב על זה באופן הבא: לכל מספר טבעי קבוע n, יש k עבורו כל המונומים ב-$F\left(x^{8^k}\right)$ גדולים מ-x^n (מלבד המונום x^0), אז לא ניתן ליצור בעזרתם את x^n.

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{a_n} = F(x) = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + x^{8^k}\right)$$

כלומר, a_n היא המספרים שניתן לרשום ע"י חזקות 8 ללא חזרות. אז:

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0\\
&a_1 = 8^0 = 1\\
&a_2 = 8^1 = 8\\
&a_3 = 8^1 + 8^0 = 9\\
&a_4 = 8^2 = 64\\
&a_5 = 8^2 + 8^0 = 65\\
&a_6 = 8^2 + 8^1 = 72\\
&a_7 = 8^2 + 8^1 + 8^0 = 73
\end{aligned}$$

וכן הלאה. לכל חזקת 8, אנחנו בוחרים אם לקחת אותה או אם לא לקחת אותה. לכן, ניתן לחשוב על a_n כך – נכתוב את n בבינארית, ונקרא את המספר בתור מספר בבסיס 8. למשל

$$\begin{aligned}
&5784_{10} = 1011010011000_2\\
&a_{5784} = 1011010011000_8 = 69929538048
\end{aligned}$$

8. נתון n שלם חיובי. הראו שמספר הדרכים להציג את n כסכום שלמים חיוביים **שונים** שווה למספר הדרכים להציג את n כסכום טבעיים אי-זוגיים (לאו דווקא שונים).

פתרון. אין לשני המספרים האלה הצגה יפה בתור סדרה, אבל הפונקציות היוצרות שלהם קלות לכתיבה. הפונקציה היוצרת של מספר הדרכים להציג את n כסכום שלמים חיוביים שונים היא[2]

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$$

והפונקציה היוצרת של מספר הדרכים להציג את n כסכום טבעיים אי-זוגיים היא[3]

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\\&(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)\cdots\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2m-1}}\end{aligned}$$

נותר להבין למה שתי הפונקציות האלה שוות זו לזו. נראה שהמנה ביניהן שווה ל-1, כלומר ש-

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=1$$

מתקיים

$$\begin{aligned}(1-x)\cdot(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\\=(1-x^2)\cdot(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\\=(1-x^4)\cdot(1+x^4)(1+x^8)\cdots\\=(1-x^8)\cdot(1+x^8)\cdots=\cdots\end{aligned}$$

וסה"כ נקבל

$$(1-x)\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{2^k}\right)=1$$

---

[2] אני לוקח את 1, או שלא; אני לוקח את 2, או שלא; אני לוקח את 3, או שלא; ...

[3] אני בוחר כמה 1 לקחת, ואז כמה 3 לקחת, ואז כמה 5 לקחת, ...

ע"י להחליף את x ב-x^{2m-1}, נקבל

$$(1-x^{2m-1})\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+x^{(2m-1)2^k}\right)=1$$

וכאשר נכפול על כל ה-m, נקבל

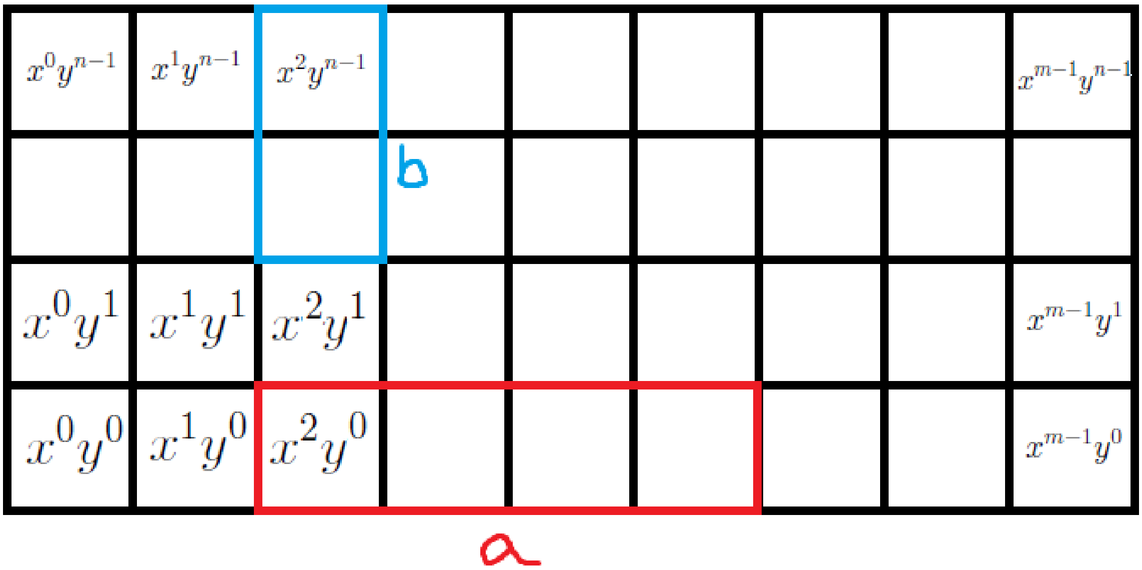
$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)=1$$

כי כל מספר n ניתן להצגה בצורה $n=(2m-1)2^k$, באופן יחיד.

הערה: לשם בהירות ההוכחה, ההוכחה לא כתובה באופן פורמלי. הקורא העקשן מוזמן להחליף את הסימן ∞ ב-N ולהשלים את פרטי ההוכחה.

9. איילה מרצפת מלבן $n \times m$ עם אריחים בגודל $1 \times b ,a \times 1$. הוכיחו כי $a \mid m$ או $b \mid n$.

פתרון. נמספר את השורות $0,1,\dots,n-1$ ואת העמודות $0,1,\dots,m-1$. בתא ה-(i,j) נכתוב $x^i y^j$.



נתבונן באריח מהצורה $a \times 1$, מתקיים

$$p_{\text{אריח אופקי}}(x,y) = \sum_{(i,j)\in\text{אריח אופקי}} x^i y^j = \sum_{i=i_0}^{i_0+a-1} x^i y^j = x^{i_0} y^j \cdot \frac{x^a - 1}{x - 1}$$

כעת, אם נציב $x = \zeta_a$ (שורש יחידה מסדר a), נקבל $p_{\text{אריח אופקי}}(\zeta_a, y) = 0$.

באופן דומה, נתבונן באריח מהצורה $1 \times b$, מתקיים

$$p_{\text{אריח אנכי}}(x,y) = \sum_{(i,j)\in\text{אריח אנכי}} x^i y^j = \sum_{i=j_0}^{j_0+b-1} x^i y^j = x^i y^{j_0} \cdot \frac{y^b - 1}{y - 1}$$

כעת, אם נציב $y = \zeta_b$ (שורש יחידה מסדר b), נקבל $p_{\text{אריח אנכי}}(x, \zeta_b) = 0$.

כעת,

$$
\begin{aligned}
p_{\text{מלבן גדול}}(x,y) &= \sum_{i,j} x^i y^j \\
&= \sum_{\text{אריח}} \left(\sum_{(i,j)\in\text{אריח אנכי}} x^i y^j + \sum_{(i,j)\in\text{אריח אופקי}} x^i y^j \right) \\
&= \sum_{\text{אריח}} \left(p_{\text{אריח אנכי}}(x,y) + p_{\text{אריח אופקי}}(x,y) \right)
\end{aligned}
$$

$$
p_{\text{מלבן גדול}}(\zeta_a,\zeta_b) = \sum_{\text{אריח}} \left(p_{\text{אריח אנכי}}(\zeta_a,\zeta_b) + p_{\text{אריח אופקי}}(\zeta_a,\zeta_b) \right) = 0
$$

ומצד שני

$$
p_{\text{מלבן גדול}}(x,y) = \sum_{i,j} x^i y^j = \left(\sum_{i=0}^{m-1} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} x^j \right) = \frac{x^m - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}
$$

$$
p_{\text{מלבן גדול}}(\zeta_a,\zeta_b) = \frac{\zeta_a^m - 1}{\zeta_a - 1} \cdot \frac{\zeta_b^n - 1}{\zeta_b - 1}
$$

לכן, אחד מבין $\zeta_a^m - 1$ ו-$\zeta_b^n - 1$ שווה ל-0, כלומר $a|m$ או $b|n$.

10. דורבן חילק את הטבעיים למספר סופי של סדרות חשבוניות אינסופיות. הוכיחו שלפחות לשתיים מהסדרות יש אותו הפרש.

פתרון. נניח שהסדרות הן

$$\{a_1 + d_1 n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_2 + d_2 n\}_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \{a_M + d_M n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

מתקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{a_k + d_k n} = x^{a_k} \sum_{n=0}^{\infty} x^{d_k n} = \frac{x^{a_k}}{1 - x^{d_k}}$$

ומכיוון שהסדרות מכסות את הטבעיים, נקבל

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} x^{a_k + d_k n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

כלומר,

$$\frac{x^{a_1}}{1 - x^{d_1}} + \frac{x^{a_2}}{1 - x^{d_2}} + \cdots + \frac{x^{a_M}}{1 - x^{d_M}} = \frac{1}{1-x}$$

כעת, נניח בשלילה שכל ה-d_k שונים זה מזה, ללא הגבלת הכלליות d_M הוא המקסימלי מבינם. נציב בשוויון שקיבלנו $x = \zeta_{d_M}$ (שורש יחידה מסדר d_M). אף מכנה לא מתאפס (כי d_M הוא שורש יחידה מסדר שגדול מ-$d_1, \dots, d_{M-1}$), מלבד המכנה של

$$\frac{x^{a_M}}{1 - x^{d_M}}$$

וזו סתירה (צד אחד שווה אינסוף, והשני סופי).

הערה: את הטיעון האחרון ניתן לכתוב בצורה יותר פורמלית ע"י להכפיל במכנה המשותף. עכשיו אנחנו טוענים שוויון בין פולינומים, לכן מותר לנו להציב מה שנרצה. לאחר שנציב $x = \zeta_{d_M}$, נקבל שכל המחוברים מתאפסים, מלבד אחד מהם (וזו סתירה).