

פונקציות יוצרות – חימום

הערה: בתרגיל זה, 0 הוא מספר טבעי. בהתאם, כל הסדרות בתרגיל יתחילו ב- a_0 .

הגדרה: הפונקצייה היוצרת של a_n היא טור החזקות ("פולינום אינסופי")

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

הערה: פונקצייה יוצרת היא טור חזקות פורמלי, כלומר, אנחנו לא חושבים על x בתור מספר, אלא בתור משתנה. בדרך זו אנחנו נמנעים מדיון על התכנסות של הטור (שאכן לא מובטחת לכל x ממשי).

חימום 1. חשבו את הפונקצייה היוצרת של הסדרות הבאות.

א. $a_n = 1$

ב. $a_n = q^n$ עבור q ממשי.

ג. $a = (1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots)$ (החל מהאיבר השלישי, הסדרה מתאפסת).

ד. $a_n = \binom{m}{n}$, עבור m טבעי כלשהו. מה קורה כש- m שלילי? וממשי כללי?

חימום 2. נניח ש- $F(x), G(x)$ הן הפונקציות היוצרות של a_n, b_n בהתאמה. הסבירו אילו סדרות נוצרות ע"י הפונקציות הבאות:

א. $F + G$	ב. $c \cdot F$, c ממשי	ג. $x^m F(x)$, m טבעי
ד. $F(c \cdot x)$, c ממשי	ה. $F(x^m)$, m טבעי	ו. $F'(x) -$ נגזרת של F
ז. $x F'(x)$	ח. $F \cdot G$	ט. $\frac{1}{1-x} \cdot F(x)$

חימום 3. מצאו את המקדם של x^{24} בטור החזקות של הפונקצייה $\frac{1+x^3+x^{12}}{(1-x)^7}$.

חימום 4. מצאו ביטוי סגור לסכום $s_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

בתיאבון!

פונקציות יוצרות – שאלות

1. נתונה סדרה המקיימת $f_0 = 0, f_1 = 1$ וכן $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. מצאו נוסחה סגורה לסדרה.

2. חשבו את הסכומים הבאים:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot 2^k \quad . \text{א.}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \cdot 2^k \quad . \text{ב.}$$

3. נגדיר סדרה ע"י $C_0 = 1$ וכן, לכל n ,

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$$

מצאו נוסחה סגורה ל- C_n . **בונים:** תעשו את זה קומבינטורית.

4. להיפו יש מטבעות של שקל, שני שקלים, חמישה שקלים, 10 שקלים (כמות בלתי מוגבלת מכל מטבע). בכמה דרכים יכול היפו להרכיב סכום של n שקלים? אפשר גם רק למצוא פונקצייה יוצרת (לא חייבים לחשב במפורש).

5. מצאו את כמות תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, 1000\}$ שסכומן מתחלק ב-5.

6. האם אפשר למספר פאות של שתי קוביות הוגנות, באופן שונה מקוביות משחק, כך שסכום הקוביות יתפלג כמו סכום של קוביות משחק רגילות?

7. תהא a_n סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נתון שלכל m קיימים מספרים טבעיים יחידים (לאו דווקא שונים) i, j, k כך ש- $a_i + 2a_j + 4a_k = m$. חשבו את a_{5784} .

8. נתון n שלם חיובי. הראו שמספר הדרכים להציג את n כסכום שלמים חיוביים **שונים** שווה למספר הדרכים להציג את n כסכום טבעיים אי-זוגיים (לאו דווקא שונים).

9. איילה מרצפת מלבן $m \times n$ עם אריחים בגודל 1×1 או $1 \times a$. הוכיחו כי $a \mid m$ או $b \mid n$.

10. דורבן חילק את הטבעיים למספר סופי של סדרות חשבוניות אינסופיות. הוכיחו שלפחות לשתיים מהסדרות יש אותו הפרש.

בתיאבון!