

# חשבון זוויות

## IMO 1

1.  $H$  הוא מפגש הגבהים ב- $ABC$  ו- $O$  הוא מרכז המעגל החוסם. נקודת החיתוך של  $BH$  עם  $AO$  תסומן  $D$ . על הצלע  $AB$  נבחרה נקודה  $P$  כך ש- $PH = PD$ . הראו כי  $ODPB$  חסום במעגל.

2. חוצי הזוויות במשולש  $ABC$  נפגשים בנקודה  $I$ . המשיק למעגל החוסם ב- $A$  נחתך עם  $BC$  בנקודה  $D$ . חוצה הזווית של  $\angle ADB$  נחתך עם  $BI, CI$  ב- $P, Q$  בהתאמה. תהי  $M$  אמצע  $PQ$ . הראו כי  $IM$  עובר באמצע הקשת  $\widehat{BAC}$ .

3. נתון משולש  $ABC$  ונקודה  $D$  בתוכו. הישרים  $BD, CD$  נחתכים שנית עם המעגל החוסם בנקודות  $E, F$  בהתאמה. הראו כי שתיים מבין ארבעת נקודות החיתוך של המשיקים מ- $B$  למעגל  $ADF$  והמשיקים מ- $C$  למעגל  $ADE$ , נמצאות על המעגל החוסם של  $ABC$ .

4. נתון משולש שווה שוקיים  $ABC$ ,  $AB = AC$ . על הצלעות  $AB, AC$  נבחרו נקודות  $D, E$  בהתאמה כך ש- $AD = CE$ . הישרים  $DE$  ו- $BC$  נחתכים בנקודה  $F$ . נבחרה נקודה  $X$  כך שהמשולשים  $ABC$  ו- $XDE$  דומים ו- $A, X$  נמצאים מאותו הצד של הישר  $DE$ . הוכיחו כי  $XF$  משיק למעגל  $ABC$ .

5. במרובע קמור  $ABCD$  חוצי הזוויות החיצוניים של זוויות המרובע יסומנו  $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$ . הישרים  $\ell_A, \ell_B$  נחתכים ב- $M$ ,  $\ell_B, \ell_C$  נחתכים ב- $I$ ,  $\ell_C, \ell_D$  נחתכים ב- $N$ ,  $\ell_D, \ell_A$  נחתכים ב- $K$ . הראו כי המעגלים  $ABM$  ו- $CDN$  משיקים אם ורק אם המעגלים  $BCI$  ו- $ADK$  משיקים.

6. על הצלעות  $AB, AC$  של משולש  $ABC$  נבחרו נקודות  $D, E$  כך ש- $BCDE$  חסום. הקטעים  $BE, CD$  נחתכים ב- $P$ . נסמן ב- $Q, R$  את השיקופים של  $P$  ביחס ל- $AB, AC$ . הראו כי המעגלים  $ABC, AQR, ADE$  נחתכים בשתי נקודות משותפות.

## IMO 2

1. נתונה נקודה  $D$  בתוך משולש  $ABC$  כך ש- $\angle DAC = \angle ACB$ . על הקרן  $BD$  נבחרה נקודה  $E$  כך ש- $AE = CE$ . תהי  $M$  אמצע  $BC$ . הראו כי המעגל  $BEM$  משיק ל- $AB$ .

2.  $O$  הוא מרכז המעגל החוסם של משולש  $ABC$ . הישר  $CO$  נחתך עם הגובה מ- $A$  בנקודה  $K$ . נסמן ב- $M, N$  את אמצעי הקטעים  $AC, AK$ . המעגל  $BCM$  נחתך שנית עם  $AB$  בנקודה  $X$ . נקודת החיתוך של  $NO$  עם הצלע  $BC$  תסומן  $Y$ . הראו כי  $BXOY$  חסום במעגל.

3. נתונים שני מעגלים  $\omega_1, \omega_2$  שנחתכים בנקודות  $A, B$ . יהיו  $C$  על  $\omega_1$  ו- $D$  על  $\omega_2$  כך ש- $A, C, D$  נמצאות על ישר. המשיקים ל- $\omega_1$  ב- $A, C$  נחתכים בנקודה  $E$  והמשיקים ל- $\omega_2$  ב- $A, D$  נחתכים בנקודה  $F$ . המעגלים  $BCE, BDF$  נחתכים בנית ב- $X$ . הישרים  $EF$  ו- $AB$  נחתכים בנקודה  $Y$ . הראו כי  $CDXY$  חסום במעגל.

4. על הצלעות  $AB, AC$  של משולש  $ABC$  נבחרו נקודות  $D, E$  כך ש- $AD = AE$ . על המעגל החוסם של  $ABC$  נבחרו נקודות  $P, Q$  כך ש- $BP \parallel CQ \parallel DE$ .

א. הראו כי  $DQ, PE$  נחתכים על המעגל  $ADE$ .

ב. בהנחה שמפגש הגבהים של  $ABC$  נמצא על המעגל  $ADE$ , הראו כי  $DP, QE$  נחתכים על המעגל  $ADE$ .

### IMO 3

1. מעגל  $\omega$  חסום במשולש  $ABC$  ומשיק לצלעות  $BC, AC, AB$  בנקודות  $D, E, F$  בהתאמה. נסמן ב- $M$  את אמצע  $EF$  וב- $T$  את הנקודה הנגדית ל- $D$  על  $\omega$ . על הישר  $TM$  נבחרו נקודות  $P, Q$  כך ש- $PA \parallel BC$  ו- $Q \neq T$  נמצאת על  $\omega$ . הישרים  $DE, DF$  נחתכים עם  $AP$  בנקודות  $X, Y$  בהתאמה. הראו כי המעגלים  $DXY$  ו- $APQ$  משיקים.

2. יהי משולש  $ABC$  ו- $H$  מפגש הגבהים במשולש. בתוך המשולש  $ABC$  נבחרה נקודה  $P$  כך  $\angle HPC = 3\angle HBC, \angle HPB = 3\angle HCB$ . השיקופים של  $P$  ביחס ל- $BH, CH$  יסומנו  $X, Y$  בהתאמה. תהי  $S$  מרכז המעגל החוסם של  $AXY$ . הראו כי

$$\angle BAS = \angle CAP$$