

פולינומים ציקלוטומיים ומשפט זיגמונדי

1. נסחו והוכיחו גרסה של משפט זיגמונדי ל- $a^n + b^n$.
2. נתונים p_1, p_2, \dots, p_n ראשוניים שונים גדולים מ-3. הוכיחו כי ל- $2^{p_1 p_2 \dots p_n} + 1$ יש לפחות 2^{2^n} מחלקים שונים.
3. מצאו את כל הטבעיים a, m, n המקיימים $a^m + 1 = (a + 1)^n$.
4. יהי a טבעי. הוכיחו כי $\frac{p-1}{\text{ord}_p(a)}$ לא חסום.
5. הוכיחו שקיים מספר n עם בדיוק 2000 מחלקים ראשוניים שונים כך ש- $n | 2^n + 1$.
6. פתרו בשלמים:
$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$
7. הוכיחו שיש אינסוף ערכים של n עבורם כל המחלקים הראשוניים של $n^2 + n + 1$ קטנים מ- \sqrt{n} .
8. הראו שאם n מתחלק רק בשני ראשוניים שונים אז כל המקדמים של $\phi_n(x)$ שייכים ל- $\{-1, 0, 1\}$.
9. נתון ראשוני p . הוכיחו שיש אינסוף ראשוניים q כך שלכל n טבעי $q \nmid n^p - p$.
10. הוכיחו כי כל מספר שלם הוא מקדם של מונום כלשהו בפולינום ציקלוטומי כלשהו.

בתאבון!