

## צעצועים וקופסאות

1. הראו כי ניתן להכניס את מכון ויצמן בלי לדחוס או לקפל בקובייה שצלעותיה באורך מטר אחד והמימד שלה הוא מספיק גבוה.
2. מה הגודל של הקופסה הקובייתית הקטנה ביותר, אליה ניתן להכניס 8 כדורים זהים נתונים?
3. מה הנפח של התמניון המשוכלל הכי גדול שניתן להכניס אותו לקופסה נתונה בצורת קובייה?
4. מה הנפח של הקובייה הכי גדולה שניתן להכניס אותה לקופסה נתונה בצורת תמניון משוכלל?
5. קובייה נמצאת בתוך קופסה בצורת ארבעון (לאו דווקא משוכלל). מצאו את היחס המינימלי בין נפח הארבעון לנפח הקובייה.
6. כיצד להכניס אליפסה עם השטח הגדול ביותר בחצי עיגול נתון?
7. כיצד להכניס לקופסה בצורת תריסרון משוכלל את הקובייה הגדולה ביותר שאפשר?
8. כיצד להכניס לקופסה בצורת תמניון את העשרימון המשוכלל הגדול ביותר שאפשר?
9. נתונה פירמידה  $SABCD$  שבסיסה הוא ריבוע  $ABCD$ , והקודקוד  $S$  נמצא במרחק שווה מכל קודקודי הבסיס. לפירמידה זו יש חתך שהוא מחומש משוכלל. מצאו את  $\frac{SA}{AB}$ .
10. א. במישור נמצאים מספר מצולעים קמורים ללא נקודות פנימיות משותפות. הראו שניתן להזיז ברציפות את אחד המצולעים רחוק ככל שתמצו בלי לגעת במצולעים האחרים.  
ב. במרחב נמצאים מספר פאונים קמורים ללא נקודות פנימיות משותפות. האם בהכרח ניתן להזיז ברציפות את אחד הפאונים רחוק ככל שתמצו בלי לגעת במצולעים האחרים?
11. נתונים ווקטורים  $v_1, \dots, v_{100}$ , שנמצאים בתוך הקובייה  $[-1, 1]^3$ , כלומר הערך המוחלט של כל קואורדינטה של כל ווקטור קטן או שווה ל-1.  
א. הראו כי ניתן לבחור סימנים בביטוי  $w = \pm v_1 \pm \dots \pm v_{100}$  על מנת שיתקיים:  $|w| \leq 10$ .  
ב. החליפו את הקבוע 10 בסעיף הקודם בקבוע הכי קטן שתצליחו להוכיח עבורו.
12. עבור שני משולשים ששטחיהם  $S_1$  וצלעותיהם  $a_i, b_i, c_i$  הוכיחו כי 
$$a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2 - b_2^2) + c_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) \geq 16S_1S_2.$$

בתאבון!