תומבי

1. האם ניתן לצבוע את המספרים הטבעיים ב-2024 צבעים כך שלא תהיה שלישייה צבעונית שבה סכום של שני מספרים שווה לשלישי?

2. מצאו את כל הטבעיים $n \geq 2$ עבורם לכל $a_1, a_2, \dots, a_n$ טבעיים שסכומם לא מתחלק ב-n יש $1 \leq i \leq n$ כך שהמספרים $a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-1}$ כולם לא מתחלקים ב-n (המספור ציקלי, כלומר $a_{k+n} = a_k$).

3. נתון ראשוני p ומספרים שלמים $a_1, a_2, \dots, a_p$. הוכיחו שקיים מספר טבעי k כך שהמספרים $a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$ יוצרים לפחות $\frac{p}{2}$ שאריות שונות מודולו p.

4. נתון מספר טבעי n. מצאו את ה-k המינימלי עבורו לכל קבוצה של k מספרים טבעיים אפשר למצוא תת קבוצה בגודל זוגי עם סכום שמתחלק ב-n.

5. מצאו את כל המספרים הטבעיים n, k עבורם קיימים מספרים טבעיים $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, .. b_k$ כך שהמספרים $a_1b_1, a_1b_2, \dots a_1b_k, a_2b_1, \dots, a_nb_k$ שונים בזוגות מודולו nk.

6. במעגל כותבים מספרים טבעיים כך ש-1 מופיע בדיוק פעם אחת וכל מספר מחלק את סכום השכנים שלו. הוכיחו שלכל n טבעי, המספר n כתוב במעגל לכל היותר $\varphi(n)$ פעמים (כמות המספרים שזרים ל-n וקטנים או שווים לו).

7. הוכיחו שקיימת תת קבוצה A של $\{1,2,3, \dots, 2^n\}$ כך ש-$|A| = n$ ולכל 2 תתי קבוצות שונות ולא ריקות של A, סכום המספרים בקבוצה הראשונה לא מחלק את סכום המספרים בקבוצה השנייה.

8. נתון מספר טבעי $k > 1$. נסמן $n = 2^k + 1$. הוכיחו שלכל n מספרים טבעיים $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, למספר

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j)$$

יש לפחות $k + 1$ מחלקים ראשוניים שונים.

9. נתון מספר טבעי k וקבוצה F בגודל $2k$. נתון שקיים אוסף X של תתי קבוצות של F בגודל k כך שכל תת קבוצה של F בגודל $k - 1$ מוכלת בדיוק בקבוצה אחת מ-X. הוכיחו כי $k + 1$ ראשוני.

10. נתונה קבוצת טבעיים A בגודל n. הוכיחו כי קיימת תת קבוצה $B \subseteq A$ בגודל $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ כך שלכל $a, b, c \in B$ מתקיים $a + b \neq c$.